DISKREČIOJI MATEMATIKA

(Rinktiniai kombinatorikos skyriai)

PRATARMĖ

Mielas Skaitytojau, Jūs atsivertėte diskrečiosios matematikos paskaitų, autoriaus skaitytų 2003 ir 2004 metų rudens semestruose, konspektą. Klausytojai buvo magistrantai – būsimieji matematikos ir informatikos mokytojai, todėl manėme, kad paskaitų medžiaga turėtų duoti ne tik kombinatorikos ir grafų teorijos žinių, bet ir gilios filosofinės tiesos, kad matematika yra vieninga, suvokimą. Kiek tai pavyko, spręskite patys. Gal po šio trumpučio, nors ir nelengvo kurso, kils noras dar pasirausti mokslinėje literatūroje ieškant įdomesnių teiginių ir jų įrodymų vingrybių. Iš tiesų, kai kurie išdėstyti rezultatai buvo paimti iš knygos „Įrodymai iš KNYGOS", kurią visi numanome esant. Tai puikios teoremos, o jų įrodymai pilni grožio. Pajuskite jį!

TURINYS arba PROGRAMA

I DALIS. KOMBINATORINIŲ STRUKTŪRŲ SUSKAIČIAVIMAS

1. Adityvieji natūraliojo skaičiaus skaidiniai
2. Aibės skaidiniai. Belo skaičiai
3. Polinomai virš baigtinio kūno
4. Rūšiavimo algoritmas ir binarieji medžiai
5. Vidutinis žingsnių skaičius greitojo rūšiavimo algoritme
6. Numeruotų medžių skaičius. Cayley teorema
7. Simetrinė grupė
8. Visi baigtinės aibės atvaizdžiai
9. Numeruotosios kombinatorinės struktūros
10. Nenumeruotųjų struktūrų kompleksai

II DALIS. EKSTREMALIOJI AIBIŲ TEORIJA

1. Dirichlet principo taikymas
2. Perskaičiuokime dukart
3. Poravimas. Hallo teorema
4. Skirtingi poaibių atstovai
5. Nulių ir vienetų matricos
6. Besikertančių poaibių šeimos
7. De Bruijno-Erdiošo teorema
8. „Politiko" teorema
9. Spernerio šeima
10. Klikų problema
11. Tikimybinis metodas

I DALIS. KOMBINATORINIŲ STRUKTURŲ SUSKAIČIAVIMAS

1. Adityvieji natūraliojo skaičiaus skaidiniai

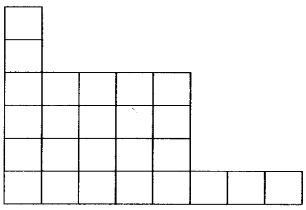
Pradėsime nuo paprastų uždavinių. Panagrinėkime klasikinį kombinatorikos ir skaičių teorijos uždavinį: *kiek kartų natūralųjį skaičių n galima užrašyti suma*

$$n = n_1 + \cdots + n_k \tag{1}$$

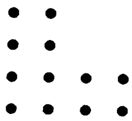
Čia k ir n_k - bet kokie natūralieji skaičiai. Dėmenų tvarką laikykime nesvarbia, todėl papildomai galime reikalauti, kad būtų $n_1 \geq \cdots \geq n_k \geq 1$. Ieškomasis skaičius vadinamas *Eulerio-Hardy-Ramanujano* vardu ir žymimas $p(n)$. Sugrupavę vienodus dėmenis, (1) lygybę galime užrašyti ir taip:

$$n = 1k_1 + \cdots + nk_n. \tag{2}$$

Dabar $k_j \geq 0$ nurodo, kiek dėmenų, lygių j buvo (1) skaidinyje. taigi, $p(n)$ - išreiškia ir vektorių $\bar{k} = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^+$, tenkinančių (2) lygybę skaičių. Skaidinius (1) arba (2) galima vaizduoti lentelėmis:



20=8+5+5+1+1



12=4+4+2+2

vadinamomis *Jungo* arba *Ferero* diagramomis.

Eulerio teorema. *Tegu* $p(0) = 1$, *tada*

$$\sum_{n\geq 0} p(n)t^n = \prod_{j\geq 1}(1-t^j)^{-1} =: f(t), \quad t \in \mathbf{C},\ |t| < 1.$$

Euleris šią tapatybę naudojo formaliai, be griežto pagrindimo. Taip mes dažnai elgsimės ateityje, bet šį kartą pateiksime visas įrodymo detales.

Įrodymas. Tarkime m - bet koks natūralusis skaičius. Kai $|t| < 1$, galime dauginti panariui baigtinį skaičių absoliučiai konverguojančių eilučių

$$f_m(t) := \prod_{j\leq m}(1-t^j)^{-1} = (1 + t + t^2 + \cdots) \ldots (1 + t^m + t^{2\cdot m} + \cdots) =$$

$$= \sum_{k_1,\ldots,k_m \geq 0} t^{1k_1+\cdots+mk_m} = \sum_{n\geq 0} p_m(n)t^n,$$

čia $p_m(n)$ – lygties $1k_1+\cdots+mk_m = n$ sprendinių, priklausančių $\mathbf{Z}^{+m}$ skaičius, $p_m(0) = 1$. Aišku, $p_m(n) \le p(n)$ ir $p_m(n) = p(n)$, kai $1 \le n \le m$. Taigi,

$$f_m(t) = 1 + \sum_{n=1}^{m} p(n)t^n + \sum_{n \ge m+1} p_m(n)t^n.$$

Srityje $0 \le t < 1$ dalinės sandaugos $f_m(t)$ konverguoja į begalinę sandaugą $f(t)$. Be to, $f_m(t) \le f(t)$, todėl

$$\sum_{n=0}^{m} p_m(n)t^n \le f_m(t) \le f(t).$$

vadinasi, eilutės

$$\sum_{n \ge 0}^{\infty} p(n)t^n, \quad \sum_{n \ge 0}^{\infty} p_m(n)t^n$$

konverguoja, pastaroji – net tolygiai m atžvilgiu. Pastebėję, jog $p_m(n) \to p(n)$, kai $m \to \infty$ su visais $n \ge 0$, srityje $0 \le t < 1$ pereiname prie ribos ir gauname

$$\sum_{n \ge 0}^{\infty} p(n)t^n = \lim_{m \to \infty} \sum_{n \ge 0}^{\infty} p_m(n)t^n = \lim_{m \to \infty} f_m(t) = f(t).$$

Pastebėję, kad nagrinėjamos eilutės ir sandaugos konverguoja absoliučiai srityje $|t| < 1$, galime teigti, kad lygybė galioja ir šiame realiosios tiesės intervale. Pagal analizinio pratesimo principą tapatybė galioja netgi kompleksinės plokštumos vienetiniame skritulyje. $\diamond$

Pastebėkime, kad kiekviena natūraliojo laipsnio šaknis yra funkcijos $f(t)$ polius, todėl vienetinis apskritimas yra natūrali jos analizinio pratesiamumo riba. Naudojantis Koši formule galima toliau nagrinėti seką $p(n)$, bet tai – gana sudėtingi skaičiavimai. Dvidešimto amžiaus pradžioje Hardis ir Ramanudžanas, pvz., įrodė, kad

$$p(n) \sim \frac{\sqrt{3}}{4n} e^{2\pi\sqrt{n/6}}, \quad n \to \infty.$$

2. Aibės skaidiniai. Belo skaičiai

Tarkime A – n elementų aibė (n aibė). Nagrinėkime visas jos išraiškas nesikertančių ir netuščių jos poaibių sąjungomis

$$A = \bigcup_{k=1}^{s} A_k, \qquad A_k \subset A, \quad A_k \cap A_j = \emptyset, \quad 1 \le j < k \le s;$$

čia n – bet koks natūralusis skaičius. Tokių skaidinių kiekis vadinamas *Belo skaičiumi* ir žymimas B_n. Panagrinėkime jį.

1 teorema. *Susitarkime, kad* $B_0 = 1$. *Tada*

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}, \quad n \geq 1.$$

Įrodymas. Galime nagrinėti aibę $A = \{1, \ldots, n\}$. Bet koks A skaidinys poaibiais turi vieną poaibį Q su skaičiumi n. Tegu

$$Q = \{n\} \cup X \subset A, \quad n \notin X,$$

o X yra $(n-1)$ aibės $A \setminus \{n\}$ poaibis. Jei $|Q| = k$ – aibės Q elementų skaičius, tai kintant X galima sudaryti $\binom{n-1}{k-1}$ poaibių Q.

Pagal Belo skaičiaus apibrėžimą aibė $A \backslash Q$ gali būti išskaidoma sąjungomis B_{n-k} kartų. Kadangi visas A sąjungas galime gauti išrenkant aibes Q ir išskaidant likusį poaibį, tai

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}.$$

$\diamond$

Kombinatorikoje dažnai naudojami *antros rūšies Stirlingo skaičiai*, $S(n,k)$, išreiškiantys n aibės skaidinių, turinčių sąjungose k poaibių, skaičių. Tad,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k).$$

Stirlingo skaičius $S(n,k)$ taip pat galima apibrėžti ir lygybe

$$t^n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k)\, t(t-1) \cdots (t-k+1).$$

Vėliau naudosime Belo skaičių eksponentinę generuojančią funkciją

$$B(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n t^n}{n!}.$$

2 teorema. $B(t) = \exp\{e^t - 1\}$.

Įrodymas. Iš 1 teoremos išplaukia

$$\begin{aligned} B'(t) &= \sum_{n \geq 1} \frac{B_n}{(n-1)!} t^{n-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} \right) t^{n-1} = \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{n-k}}{(k-1)!(n-k)!} t^{n-k} t^{k-1} = \sum_{j \geq 1} \frac{t^j}{j!} \sum_{k \geq 0} \frac{B_k t^k}{k!} = \\ &= e^t B(t). \end{aligned}$$

Išsprendę diferencialinę lygtį

$$\frac{B'}{B} = e^t$$

su pradine sąlyga $B(0 = 1$, baigiame teoremos įrodymą. $\diamond$

Išvada (Dobinskio formulė).

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k\geq 0} \frac{n^k}{k!}, \quad n \geq 1.$$

Įrodymas. Skaičiuojame $B(t)$ naudodami 2 teoremos rezultatą ir gauname

$$B(t) = e^{-1} \sum_{k\geq 0} \frac{e^{kt}}{k!} = e^{-1} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{n\geq 0} \frac{k^n}{n!} t^n =$$
$$= e^{-1} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k\geq 0} \frac{k^n}{k!} \right) t^n.$$

Sulyginę $B(t)$ koeficientus, gauname norimą formulę. $\diamond$

Kombinatorikoje sutinkami ir kitokie aibės skaidinių uždavinio variantai. Tarkime, reikia rasti n aibės skaidinių sąjungomis iš k poaibių, kurių pirmame yra n_1 elementų, antrame – n_2, o k-ame – n_k elementų, skaičių. Tokių skaidinių skaičius lygus polinominiam koeficientui

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!}.$$

Čia be to, $n_1 + \cdots + n_k = n$.

3 teorema.

$$B_n = n! \sum_{\substack{\bar{k}\in \mathbf{Z}^{+n} \\ 1k_1+\cdots+nk_n=n}} \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{(j!)^{k_j}\, k_j!}$$

Įrodymas. Vektorius $\bar{k} = (k_1, \dots, k_n)$ su $k_j \in \mathbf{Z}^+$ tokiai, kad $1k_1+\cdots+nk_n = n$, nusako skaidinio struktūrą: jame yra k_j galios j poaibių. Pasidarykime k_j dėžučių, kuriose gali tilpti j, $1 \leq j \leq n$, skaičių:

$$\overbrace{(\cdot)\dots(\cdot)}^{k_1}\dots\overbrace{\underbrace{(\cdot,\dots,\cdot)}_{j}\dots\underbrace{(\cdot,\dots,\cdot)}_{j}}^{k_j}\dots\overbrace{\underbrace{(\cdot,\dots,\cdot)}_{n}\dots\underbrace{(\cdot,\dots,\cdot)}_{n}}^{k_n}.$$

Bet kaip išdėstydami visus n skaičių į jas, t.y. panaudodami visus $n!$ kėlinių, gauname nurodytos struktūros skaidinius. Atkreipkime dėmesį į pasikartojimus. Jų priežastys yra dvi:

(i) poaibių tvarka skaidinyje yra nesvarbi;

(ii) j galios poaibio elementų tvarka irgi nesvarbi.

Kitaip tariant, naudojant įvairius kėlinius, to pačio didumo dėžutės su įrašytais skaičiais galėjo keistis vietomis ir duoti tuos pačius skaidinius. Dėl (i) priežasties kievienas skaidinys buvo pakartotas

$$k_1! \dots k_j! \dots k_n!$$

kartų, o dėl (ii) priežasties –

$$(1!)^{k_1} \dots (j!)^{k_j} \dots (n!)^{k_n}$$

kartų. Padalinę $n!$ iš šių sandaugų, gauname reikiamą formulę. $\diamond$

3. Polinomai virš baigtinio kūno

E.Galua įrodė, kad kiekvieno baigtinio kūno elementų skaičius yra pirminio skaičiaus laipsnis, kurį pažymėkime q, be to, kiekvienam q galima apibrėžti tokios eilės kūną, kurį žymėsime $\mathbf{F}_q$. Nagrinėsime polinomų virš jo žiedą $\mathbf{F}_q[x]$. Tegu $\mathbf{F}_q^*[x]$ – polinomų su vienetiniu vyriausiuoju koeficientu multiplikacinis pusgrupis. Pagal pagrindinę polinomų skaidumo teoremą kiekvienas $f \in \mathbf{F}_q^*[x]$ daugiklių tvarkos tikslumu yra išskaidomas pirminių (neskaidžių virš $\mathbf{F}_q$) polinomų sandauga

$$f = p_1 \dots p_s. \tag{1}$$

Čia $p_i \in \mathbf{F}_q^*[x]$. Tarkime, kad polinomo f laipsnis yra n ir (1) skaidinyje yra k_j pirminių polinomų, kurių laipsnis yra j, $1 \le j \le n$. Turime sąryšį

$$1k_1 + \dots + nk_n = n. \tag{2}$$

Tegu $\pi(j)$ – j laipsnio pirminių polinomų su vienetiniu vyriausiuoju koeficientu skaičius. Rasime jo asimptotinį kitimo pobūdį, kai $j \to \infty$.

1 teorema. *Kiekvienam natūraliajam n teisinga lygybė*

$$q^n = \sum_{\substack{\bar{k} \in \mathbf{Z}^{+n} \\ 1k_1 + \dots + nk_n = n}} \prod_{j=1}^{n} \binom{\pi(j) + k_j - 1}{k_j}.$$

Įrodymas. Pastebėkime, jog q^n lygus n laipsnio polinomų iš $\mathbf{F}_q^*[x]$ skaičiui. Visus tokius polinomus suskirstykime į klases. Tegu vieną klasę sudaro n laipsnio polinomai, kurių (1) skaidinyje yra k_j j-o laipsnio pirminių polinomų. Vektorius $\bar{k}$ vadinamas šios klasės polinomų *struktūros* vektoriumi. Jis tenkins (2) sąlygą ir vienareikšmiškai apibrėš nagrinėjamą klasę.

Kadangi kiekvieną polinomą galima suvokti kaip pirminių polinomų (1) sandaugą, suskaičiuokime, kiek tokių sandaugų galima sudaryti. Pirminius polinomus, kurių laipsnis yra j, galime imti su pakartojimais iš visos jų aibės, turinčios $\pi(j)$ elementų. Pagal kartotinių derinių apibrėžimą gauname

$$\binom{\pi(j)+k_j-1}{k_j} = (-1)^{k_j}\binom{-\pi(j)}{k_j} \tag{3}$$

galimybių. Skirtingų laipsnių polinomų rinkimas atliekamas nepriklausomai, todėl nagrinėjamos klasės polinomų skaičius lygus šių koeficientų sandaugai, o visų n laipsnio plolinomų skaičių gausime sudėję šias sandaugas pagal struktūros vektorius $\bar{k}$, tenkinančius (2) sąlygą. ◇

2 teorema. *Jei* $z \in \mathbf{C}$, $\quad |z| < q^{-1}$, *tai*

$$\sum_{n\geq 0} q^n z^n = (1-qz)^{-1} = \prod_{j\geq 1}(1-z^j)^{-\pi(j)}.$$

Įrodymas. Pasinaudokime apibendrintąja Niutono binomo ir (3) formulėmis. Gauname

$$(1-z^j)^{-\pi(j)} = \sum_{k\geq 0}\binom{\pi(j)+k-1}{k} z^{jk}.$$

Formaliai dauginkime šias eilutes pagal $j \geq 1$ ir gautuosius dėmenis grupuokime pagal vienodus z laipsnius. Gauname

$$\prod_{j\geq 1}(1-z^j)^{-\pi(j)} = \sum_{k_1,k_2,\dots\geq 0}\binom{\pi(1)+k_1-1}{k_1} z^{1k_1}\binom{\pi(2)+k_2-1}{k_2} z^{2k_2}\cdots =$$
$$= \sum_{n\geq 0} z^n \Bigg(\sum_{\substack{\bar{k}\in\mathbf{Z}^{+n}\\ 1k_1+\dots+nk_n=n}} \prod_{j=1}^{n}\binom{\pi(j)+k_j-1}{k_j}\Bigg).$$

Pagal 1 lemą apskliaustasis koeficientas lygus q^n. Taigi formali lygybė yra įrodyta. Panašių formalių operacijų pagrindimą, esame aptarę skyrelyje apie natūraliojo skaičiaus skaidinius. ◇

Skaičių teorijoje yra apibrėžiama Miobiuso funkcija:

$$\mu(m) = \begin{cases} 1, & \text{jei } m = 1; \\ 0, & \text{jei egzistuoja pirminio skaičiaus kvadratas, dalijantis } m; \\ (-1)^k, & \text{jei } m \text{ išsiskaido } k \text{ skirtingų pirminių skaičių sandauga.} \end{cases}$$

Viena iš jos savybių yra išreiškiama apgrežimo formulėje.

Lema (Miobiuso apgrežimo formulė). *Lygybės*

$$a_n = \sum_{m|n} b_n \quad \textit{ir} \quad b_n = \sum_{m|n}\mu(m)a_{n/m}, \qquad a_n, b_m \in \mathbf{C},$$

yra ekvivalenčios. Čia sumuojama pagal visus natūraliuosius n daliklius.

Įrodymas. ◇

3 teorema. *Su visais natūraliiaisiais skaičiais n teisinga formulė*

$$\pi(n) = \frac{1}{n}\sum_{m|n}\mu(m)q^{n/m} = q^n/n + O(nq^{n/2}).$$

Įrodymas. Logaritmuodami 2 teoremoje gautą generuojančios funkcijos ičraišką, gauname

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(qn)^n}{n} = \sum_{j\geq 1}\sum_{k\geq 1}\frac{t^{kj}}{k} = \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{j|n} j\pi(j)\right)\frac{t^n}{n}.$$

Vadinasi,

$$q^n = \sum_{j|n} j\pi(j).$$

Taigi, pirmasis teoremos teiginys išplaukia iš Miobiuso apgrežimo formulės. Įvertis gaunamas atskyrus dėmenį, kai $m = 1$, ir trivialiai įvertinus kitus dėmenis. ◇

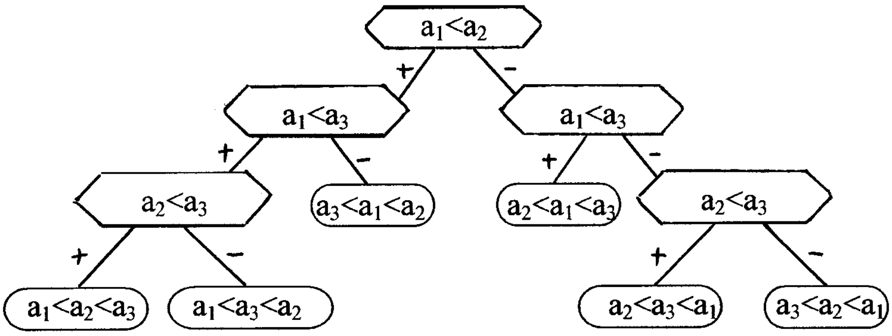
Užduotis. Įrodykite, kad pusgrupyje $\mathbf{F}_q^*[x]$ n-ojo laipsnio polinomų, neturinčių kartotinių pirminių daugiklių (*bekvadračių*) skaičius

$$\tilde{p}(n) = \sum_{\substack{\bar{k}\in\mathbf{Z}^{+n} \\ 1k_1+\cdots+nk_n=n}} \prod_{j=1}^{n}\binom{\pi(j)}{k_j}.$$

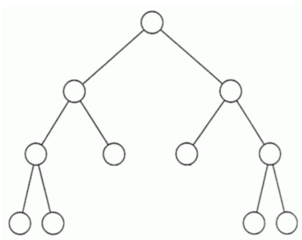
4. Rūšiavimo algoritmas ir binarieji medžiai

Informatika irgi ikelia kombinatorinių uždavinių. Ypač aktualios yra algoritmų teorijos problemos. Nagrinėkime bene populiariausią duomenų rūšiavimo uždavinį.

Tarkime, kad reikia sutvarkyti n skirtingų duomenų sąrašą $\{a_1, \ldots, a_n\}$ pagal kokį nors požymio (rakto) didėjimo eilę. Paprastumo dėlei laikykime, kad duomenys yra realieji skaičiai, todėl raktas yra jų didumas. Kai $n = 3$, algoritmas galėtų būti toks, kaip pavaizduota paveiksle.



Lakoniškai iliustruodami, gauname plokščiąjį grafą, vadinamą *binariuoju medžiu*:



Tokius medžius galime apibrėžti rekursyviai, t. y. naudojant pilnosios matematinės indukcijos principą.

Apibrėžimas. Medis T yra binarusis, jeigu
(i) jame yra viršūnė (vadinama *šaknimi*), sudaranti T, arba
(ii) ji yra sujungta su *kairiuoju* ir *dešiniuoju* binariaisias medžiais.

Aišku, (i) atveju turime tuščiąjį pirmos eilės medį, sudarytą iš vienos viršūnės, o (ii) atveju kairysis ir dešinysis medžiai yra mažesnių eilių negu T, todėl jų apibrėžimas galėjo būti laikomas indukcine prielaida. Žinoma, binarųjį medį galima nusakyti išvardijant jo būdingus bruožus. Kai jo eilė yra didesnė už vienetą, reikalaujama, kad jis turėtų savybes:
(iii) jame yra viena antrojo laipsnio viršūnė, laikoma *šaknimi*;
(iv) kitų viršūnių laipsniai yra lygūs 1 (jos vadinamos *lapais*) arba 3 (*vidinės viršūnės*);
(v) briaunų išvedimas kairėn ar dešinėn yra įskaitomas, t.y. jos laikomos skirtingomis.

Atkreipkime dėmesį į tai, kad takas nuo šaknies iki lapo (medyje toks takas yra vienintelis) binariajame medyje, vaizduojančiame algoritmą, atitinka kažkokio sąrašo duomenų surūšiavimą. Rūšiuojant n duomenų, kad programa veiktų visais įmanomais atvejais, iš viso lapų turi būti ne mažiau negu $N := n!$ lapų. Kiekvieną binarų medį su šia savybe atitinka rūšiavimo algoritmas, todėl svarbu sužinoti binariųjų medžių, turinčių N lapų, skaičių C_N. Susitarkime, kad $C_1 = 1$. Skaičiai C_N vadinami *Katalano* vardu. Rasime jų savybių.

Teorema. *Katalano skaičiai* C_N *tenkina rekurentųjį sąryšį*

$$C_N = \sum_{k=1}^{N-1} C_k C_{N-k}, \quad C_1 = 1. \tag{1}$$

Be to,

$$C_N = \frac{1}{N}\binom{2N-2}{N-1} \sim \frac{2^{2(N-1)}}{N^2\sqrt{\pi}}, \tag{2}$$

kai $N \to \infty$.

Įrodymas. Tegu $N > 1$. Iš binaraus grafo atėmę jo šaknį, gauname du binariuosius medžius. Tarkime, kairiajame iš jų yra k lapų, o dešiniajame – $(N-k)$ lapų. Čia k gali būti bet kuris iš skaičių $1, \ldots, N-1$. Pagal Katalano skaičiaus apibrėžimą galime nepriklausomai sudaryti C_k kairiųjų medžių ir C_{N-k-1} dešiniųjų. Sudėję pagal k, baigiame (1) lygybės įrodymą. Kitos lygybės įrodymui panaudojame generuojančią sekos C_N funkciją

$$F(t) := \sum_{N \geq 1} C_N t^N.$$

Kadangi

$$F(t)^2 = \sum_{N \geq 2} \left(\sum_{k=1}^{N-1} C_k C_{N-k} \right) t^N,$$

todėl

$$F(t) = t + F(t)^2$$

ir $F(0) = 0$. Vadinasi,

$$F(t) = \frac{1}{2}\left(1 - (1-4t)^{1/2}\right).$$

Naudodami apibendrintąją Niutono binomo formulę, randame koeficientą prie t^N. Jis lygus

$$C_N = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{N}(-4)^N = \frac{1}{2}\frac{(2N-3)!!\,4^N}{2^N N!} = \frac{(2N-2)!}{(N-1)!N!}.$$

Taigi, (2) lygybė įrodyta. Teoremoje pateikta asimptotika išplaukia iš Stirlingo formulės:

$$\sqrt{2\pi n}(n/e)^n \leq n! \leq e^{1/12n}\sqrt{2\pi n}(n/e)^n.$$

◇

5. Vidutinis kelio ilgis greitojo rūšiavimo algoritme

Algoritmo kokybė priklauso nuo vidutinio panaudotų duomenų palyginimų skaičiaus, laikant, jog duomenų sąraše dydžių tvarka yra vienodai galima. Kaip ištirti šį algoritmo parametrą, ypač kai duomenų skaičius didėja? Binariajame medyje jį atitinka vidutinis tako nuo šaknies iki lapo ilgis. Kaip ir anksčiau rūšiuokime n skirtingų duomenų sąrašą $\{a_1, \ldots, a_n\}$ pagal rakto didėjimą. Tegu duomenų raktas yra jų didumas. Panagrinėkime vieną iš populiariausių rūšiavimo algoritmų, vadinamą *greituoju* arba *Hoare's* algoritmu:

(i) žingsnis: imame pirmąjį sąrašo elementą $a = a_1$ ir sudarome du dalinius duomenų sąrašus L^- ir L^+ tokius, kad L^- duomenys būtų mažesni už a, o L^+ duomenys būtų didesni;
(ii) surūšiuojame L^- ir L^+;
(iii) turėdami surūšiuotus L^- ir L^+ bei jų tarpe a, baigiame procedūrą.

Teorema. *Tarkime, kad q_n - n duomenų sąrašo elementų vidutinis palyginimų skaičius naudojant Hoarės algoritmą. Tada*

$$q_n = 2n \log n + O(n), \quad n \geq 2.$$

Įrodymas. Pastebėkime, kad pirmajame algoritmo žingsnyje visada atliekame $n-1$ duomenų palyginimų. Antrame žingsnyje atskirta aibė L^- su vienoda tikimybe gali turėti $k = 1, \ldots, n-1$ duomenų, o L^+ - $(n-1-k)$ duomenų. Jas sutvarkydami vidutiniškai naudojame $q_k + q_{n-1-k}$ palyginimų. Vidurkinant pagal k ir prisiminę pirmąjį žingsnį, gauname

$$q_n = n - 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(q_k + q_{n-1+k}) = n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} q_k. \tag{2.1}$$

Aišku, kad $q_1 = 0$. Naudodami generuojančias funkcijas randame sekos q_n asimptotiką. Pažymėkime

$$Q(t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n t^n.$$

Padauginę panariui (2.1) iš nt^n ir sudėję pagal $n \geq 1$, gauname

$$\sum_{n\geq 1} n q_n t^n = \sum_{n\geq 1} n(n-1)t^n + 2\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n-1} q_k\right)t^n. \tag{2.2}$$

Matome, jog kairėje pusėje esanti eilutė lygi $tQ'(t)$. Ieškodami pirmosios eilutės dešinėje pusėje išraiškos, porą kartų panariui diferencijuojame begalinę geometrinę progresiją

$$\sum_{n\geq 0} t^n = (1-t)^{-1}, \quad |t| < 1.$$

Gauname, kad ieškoma eilutė lygi $2t^2/(1-t)^3$. Paskutinės eilutės (2.2) formulėje ieškome naudodami lygybę

$$\sum_{n\geq 1} t^n \sum_{n\geq 1} q_n t^n = \sum_{n\geq 1} \Big(\sum_{k=1}^{n-1} q_k \Big) t^n.$$

Taigi, š (2.2) išplaukia

$$tQ'(t) = \frac{2t^2}{(1-t)^3} + \frac{2tQ(t)}{1-t} \tag{2.3}$$

Išsprendę šią pirmos eilės diferencialinę lygtį, kai patenkinama pradinė sąlyga $Q(0) = 0$, gauname

$$\begin{aligned} Q(t) &= -2\frac{t + \log(1-t)}{(1-t)^2} = \\ &= 2(1 + 2t + 3t^2 + \cdots)(\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \cdots). \end{aligned}$$

Iš čia gauname

$$q_n = 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}(n-k+1) = 2n\log n + O(n), \quad n \geq 2.$$

Teorema įrodyta. ◇

Žinoma, kad bet kokiame rūšiavimo algoritme vidutiniškai reikia ne mažiau negu $\log_2 N! \approx 1,44...n\log n$ sąrašo elementų palyginimų.

6. Medžių skaičius. Cayley'io teorema.

Panagrinėkime kitokius negu binarieji medžiai grafus. Tarkime $G = (V, E)$ – grafas, kurio viršūnių aibė V yra netuščia, o briaunų aibė E yra sudaryta iš nesutvarkytųjų porų $e = xy$, čia $x, y \in V,\ x \neq y$. Grafai $G = (V, E)$ ir $G' = (V', E')$ vadinami *izomorfiškais*, jei egzistuoja bijekcija $\phi : V \to V'$ tokia, kad $xy \in E$ tada ir tik tada, kada $\phi(x)\phi(y) \in E'$. Skaičiuojant fiksuotos eilės $|V| = n$ grafų skaičių izomorfiškus grafus laikome lygiais. Įdomesnis yra grafų su sunumeruota viršūnių aibe, vadinamų **numeruotaisiais** grafais, atvejis. Dabar izomorfizmas turi išlaikyti ir numeraciją, t.y., jei x yra i-toji G grafo viršūnė, tai izomorfiškame G' grafe $\phi(x)$ turi būti irgi i-tąja viršūne. Pradėkime nuo paprasto teiginio.

1 teorema. *Iš viso yra*

$$2^{n(n-1)/2}$$

neizomorfiškų numeruotųjų n eilės grafų.

Įrodymas. Pastebėkime, kad uždavinys ekvivalentus pilnojo numeruoto grafo K^n pografių skaičiaus nustatymui. Bet kurios briaunos $e = x_i x_j$ galų numeriai nurodo, kurias viršūnes ji jungia, todėl skaičiuojamus pografius vienareikšmiškai apibrėžia galimi briaunų poaibiai. Pilnajame grafe yra $n(n-1)/2$ briaunų, todėl briaunų aibės poaibių skaičius lygus teoremoje nurodytam dydžiui. $\diamond$

Ketvirtame skyrelyje radome tam tikrų neizomorfiškų nemumeruotų plokščių medžių skaičių. Kaip elgtis numeruotų medžių atveju? 1889 metais Cayley apskaičiavo neizomorfiškų numeruotų n tos eilės medžių kiekį $T(n)$? Pradžioje įsitinkiname, jog yra

$$\frac{4!}{2} + 4 = 16$$

skirtingų 4-os eilės medžių. Savarankiškai panagrinėkite didesnės eilės medžius.

Cayley'io teorema. *Iš viso galime sudaryti n^{n-2} neizomorfiškų numeruotų n eilės medžių.*

1 -sis įrodymas (Prüfer'io). Tarkime $\mathcal{G}$ - nagrinėjamų medžių aibė. Kadangi sekų aibės

$$\{(a_1, \dots, a_{n-2}) : \ 1 \le a_i \le n, \ 1 \le i \le n-2\} =: \mathcal{A}$$

galia yra n^{n-2}, pakaks rasti bijektyvų atvaizdį $\mathcal{A} \to \mathcal{G}$.

Kai $n \le 2$, teiginys akivaizdus.

Tegu toliau $n > 2$. Medžiui $G = (V, E)$, kurios viršūnių aibė sunumeruota, $V = \{x_1, \dots, x_n\}$, vienareikšmiškai priskirsime seką $\alpha = (a_1, \dots, a_{n-2}) \in \mathcal{A}$, vadinamą medžio **Prüfer'io kodu**. Pradėkime nuo medžio galinės viršūnės, kurios laipsnis lygus 1. Tokios viršūnės egzistuoja, nes kiekviena briauna turi dvi viršūnes ir todėl

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(x_i) = 2(n-1).$$

Iš kelių tokių viršūnių išrinkime tą, kurios indeksas yra mažiausias. Tegu tai viršūnė x_{b_1}, o a_1 - indeksas viršūnės, gretimos pirmajai. Grafas $G - x_{b_1}$ yra $n-1$ eilės medis, todėl procesą galima kartoti, kol viršūnių, likusių grafe, skaičius yra didesnis už 2. Kai šis skaičius lygus 2, mes jau esame sudarę vienintelę seką $(a_1, \dots, a_{n-2})$.

Atvirkščiai, ar bet kokiai sekai $\alpha = (a_1, \dots, a_{n-2}) \in \mathcal{A}$ galima vienareikšmiškai priskirti medį? Atidėkime n viršūnių ir brėžkime norimą medį, vadovaudamiesi žemiau nurodytomis taisyklėmis:

a) jei b_1 - mažiausias iš bent dviejų natūraliųjų skaičių (iš $1, ..., n$), nepasirodžiusių sekoje α, tada junkime x_{b_1} su x_{a_1};

b) aibę $\{1, \dots, n\}$ pakeiskime $\{1, \dots, n\} \setminus \{b_1\}$, o α - seka $(a_2, \dots, a_{n-2})$;

c) procesą kartojame, kol išsemiame visą seką (tuo pačiu nubrėžiame $n-2$ grafo briaunas);

d) tarpusavyje sujungiame dvi likusias viršūnes.

Taip vienareikšmiškai gautasis grafas yra medis, nes jis jungia visas n viršūnių, o jo didumas yra $n-1$.

Kadangi abu nagrinėti atvaizdžiai yra vienas kito atžvilgiu yra atvirkštiniai, teorema įrodyta.

Grafų teorijai artimesnis kitas Cayley'io teoremos įrodymo būdas.

Antrasis teoremos įrodymas. Tarkime $T(n,k)$ - kiekis n tos eilės medžių, kuriuose fiksuota viršūnė $x \in V$ yra k-ojo laipsnio, $2 \le k \le n-1$. Viršūnės numeris nesvarbus, jo neminėsime. Išvesime sąryšį tarp $T(n,k)$ ir $T(n,k-1)$.

Imame medį G, kuriame $d(x) = k-1$. Jame išmeskime briauną uv, neincidenčią su x. Grafas skilo į du pomedžius, viename iš jų yra viršūnės x ir u arba x ir v. Tarkime, yra pirmasis atvejis. Sujungę dabar x su v, gauname vėl medį G', kuriame $d(x) = k$. Porą (G, G') pavadinkime *junginiu* ir suskaičiuokime jų kiekį dviem būdais. Kadangi grafui G mes galime sudaryti tiek G', kiek yra briaunų su aukščiau minėtomis savybėmis, tai vienam G mes turime $n-1-(k-1) = n-k$ partnerių. Taigi, iš viso yra $(n-k)T(n,k-1)$ junginių.

Skaičiuokime tą patį skaičių kitu būdu, pradėdami nuo G', kuriame $d(x) = k,\ k \ge 2$. Tarkime $x_1, \dots, x_k$ - gretimos x viršūnės. Paeiliui išmesdami briaunas $xx_i,\ i = 1, \dots k$, mes "atskeltume" pomedžius $T_1, \dots, T_k$, kurių eilės tegu bus $n_1, \dots, n_k$,

$$n_1 + \cdots + n_k = n - 1. \tag{1}$$

Grafo G' partnerį junginyje dabar konstruojame tokiu būdu:

a) išmetame xx_1, o vėliau viršūnę x_1 sujungiame su bet kokia iš viršūnių, nepriklausančių T_1 (turime $n-1-n_1$ galimybių);

b) tą patį kartojame su $T_2, \dots, T_k$.

Atsižvelgę į grafų G' kiekį $T(n,k)$ ir (1) iš viso gauname junginių

$$\sum_{i=1}^{n} T(n,k)(n-1-n_i) = (n-1)(k-1)T(n,k).$$

Sulyginę abi junginių skaičiaus formules, gauname

$$(n-1)(k-1)T(n,k) = (n-k)T(n,k-1).$$

Kai $k = 1$, ši rekurenčioji formulė irgi teisinga. Jos nagrinėjimui galime panaudoti akivaizdų faktą, kad $T(n, n-1) = 1$ (**žvaigždinio** grafo atvejis). Gauname

$$T(n,k) = \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1}.$$

Sudėdami šias lygybes, išvedame medžių kiekio $T(n)$ formulę

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T(n,k) = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1} = ((n-1)+1)^{n-2} = n^{n-2}.$$

Teorema įrodyta. ◇

Numeruotą medį su viena išskirta viršūne, *šaknimi*, vadinsime *šakniniu* medžiu.

Išvada. *Yra* $d_n := n^{n-1}$ *šakninių* n *eilės medžių.*

Įrodymas. Kiekvieno medžio, kurių kiekį nusako Cayley'io teorema, šaknimi gali būti bet kuri viršūnė. $\diamond$

Šakniniai numeruoti medžiai vadinami *Cayley'io* vardu. Baigtinis jų rinkinys vadinamas *šakniniu mišku.* Jį sudarančių medžių šaknų rinkinys laikomas *miško šaknimi.* Kai miško medžių tvarka yra įskaitoma, miškas vadinamas *plokščiuoju.* Jo šaknis bus sutvarkytasis medžių šaknų rinkinys.

2 teorema. *Jei* q_n – n *eilės šakninių miškų skaičius, tai*

(2)
$$q_n = (n+1)^{n-1}.$$

Įrodymas. Imkime $(n+1)$-os eilės Cayley'io medį ir atimkime jo šaknį, turėjusią numerį $j \in \{1, \dots, n+1\}$. Medis skyla į n eilės mišką. Sunumeruokime jo viršūnes pirmaisiais n natūraliųjų skaičių. Tuo tikslu buvusius viršūnių indeksus, didesnius už j, sumažinkime vienetu. Nepriklausomai nuo buvusio j, gauname vieną numeruotą n eilės mišką. Taigi, iš $(n+1)$-o $(n+1)$-os eilės medžio gavome vieną mažesnės eilės mišką.

Atvirkščiai, turėdami n eilės šakninį mišką iš keleto Cayley'io medžių, įvedame papildomą viršūnę, ir ją briaunomis sujungiame su medžių šaknimis. Priskirdami paeiliui papildomajai viršūnei numerius $j = 1, \dots, n+1$ ir buvusių viršūnių indeksus, ne mažesnius negu j padidindami vienetu, gautume $(n+1)$-ą $(n+1)$-os eilės Cayley'io medį. Vadinasi, $q_n = d_{n+1}/(n+1)$. Dabar (2) išplaukia iš Cayley'io teoremos. $\diamond$

7. Simetrinė grupė

Viena iš svarbiausių kombinatorinių struktūrų yra simetrinė grupė. Paminėsime porą jos savybių. Bijektyvus n aibės X atvaizdis σ į ją pačią vadinamas *keitiniu.* Paprastumo dėlei, tegu $X = \{1, \dots, n\}$, tada σ patogu žymėti lentele

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\sigma & 2\sigma & \dots. & n\sigma \end{pmatrix},$$

kurioje $j\sigma$ yra elemento j vaizdas, $j = 1, \dots, n$. Tegu $\mathbf{S}_n$ visų keitinių aibė, o σ_1, σ_2 du jos atstovai. Lygybė

$$j(\sigma_1\sigma_2) = (j\sigma_1)\sigma_2, \quad 1 \le j \le n$$

apibrėžia algebrinę operaciją, vadinamą *keitinių daugyba.* Algebroje įrodoma, kad $\mathbf{S}_n$ šios operacijos atžvilgiu yra grupė, vadinama *simetrine grupe.* Jos eilė yra $n!$.

Jei keitinys s skirtingų skaičių $j_1, \dots, j_s$, $1 \le s \le n$, vaizduoja cikliškai, t.y.

$$j_1 \mapsto j_2 \mapsto \dots j_s \mapsto j_1,$$

o kiti skaičiai paliekami vietoje, tai jį vadiname s ilgio *ciklu.* Tokį keitinį patogu žymėti viena *slankiųjų simbolių* eilute

(1)
$$(j_1\, j_2\, \dots\, j_s).$$

1 teorema. *Yra $(s-1)!$ s ilgio ciklų.*

Įrodymas. Anksčiau pastebėjome, kad galime sudaryti $s!$ kėlinių iš s elementų, kurie pagal (1) susitarimą duotų ciklus. Dabar atkreipkime dėmesį į tai, kad žymėdami tą patį ciklą, galėjome pradėti nuo bet kurio elemento ir cikliškai tęsti toliau. Vadinasi, darant iš visų kėlinių ciklus s kartų pasikartos tas pats ciklas. ◇

Jei $\{j_1, \ldots, j_s\} \cap \{i_1, \ldots, i_m\} = \emptyset$, tai ciklai

$$(j_1, \ldots, j_s), \quad (i_1, \ldots, i_m)$$

vadinami *nepriklausomais.*

2 teorema. *Kiekvieną keitinį galima išreikšti nepriklausomų ciklų sandauga*

$$\sigma = \kappa_1 \cdots \kappa_w. \tag{2}$$

Čia $w = w(\sigma)$ – ciklų skaičius. Be to, tokia išraiška yra vienintelė daugiklių užrašymo tvarkos tikslumu.

Įrodymas. Panaudokime algoritmizuotus samprotavimus. Jeigu j dar nėra priskirtas nagrinėjamo keitinio σ ciklui, tai raskime mažiausią natūralųjį skaičių m su savybe $j\sigma^m = j$. Toks $m \leq n$ egzistuoja, nes turime ne daugiau negu n skirtingų skaičių sekoje $j\sigma^k$, $k \geq 1$. Sudarome ciklą

$$\kappa := (j\ j\sigma\ \ldots\ j\sigma^{m-1}).$$

Tai iš tiesų yra ciklas, nes lygybė $j\sigma^k = j\sigma^l$ su $1 \leq k < l \leq m = 1$, dėka $j = j\sigma^{l-k}$, prieštarautų m minimalumui. Skaičius m būtų šio ciklo ilgis.

Toliau taip pat skaičius $X \backslash \{j, j\sigma, \ldots, j\sigma^{m-1}\}$ skirstytume į ciklus. Naujasis ciklas būtų nepriklausomas nuo prieš tai sudaryto. Iš tiesų, jei i, $i^p = i$, – skaičius, nepriklausantis pirmajam ciklui, tai lygybė

$$j\sigma^k = i\sigma^l \tag{3}$$

vestų prie sąryšio $j\sigma^{k+p-l} = i$, rodančio, kad i turėtų priklausyti pirmajam ciklui. Prieštara akivaizdi. Išsėmę visus X skaičius, baigiame skaidinio egzistavimo įrodymą.

Jei egzistuotų pora skirtingų skaidinių ciklais, besiskiriančių ne tik išdėstymo tvarka, tai turėtų egzistuoti bent vienas elementas, patenkantis į du ciklus ir todėl jam rastume dvi išraiškas, tarkim, (3). Tai vėl duoda prieštarą. ◇

Kombinatorikai svarbu, kokio ilgio ir kiek ciklų sudaro keitinį. Pažymėkime k_j j ilgio ciklų (2) skaidinyje, $1 \leq j \leq n$. Aišku,

$$1k_1 + \cdots + nk_n = n \tag{4}$$

o ciklų kiekis lygus $w(\sigma) = k_1 + \cdots + k_n$. Vektorių $\bar{k} := \bar{k}(\sigma) = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbf{Z}^{+n}$ vadinsime keitinio σ *struktūros vektoriumi.* Jis turi ir algebrinę prasmę.

Du simetrinės grupės $\mathbf{S}_n$ keitiniai σ ir σ_1 vadinami *jungtiniais*, jeigu egzistuoja $\tau \in \mathbf{S}_n$ toks, kad

$$\sigma = \tau\sigma_1\tau^{-1}. \tag{5}$$

Čia τ^{-1} keitiniui τ atvirkštinis keitinys.

3 teorema. *Du keitiniai yra jungtiniai tada ir tik tada, jei jų struktūros vektoriai sutampa.*

Įrodymas. Tarkime $\kappa = (x_1, \ldots, x_k)$ - keitinio σ_1 ciklas, σ_1 yra jungtinis su σ ir galioja (5) sąryšis. Turime

$$x_1 = x_k\sigma_1,\ x_2 = x_1\sigma_1,\ \ldots,\ x_k = x_{k-1}\sigma_1.$$

Pažymėkime $y_j = x_j\tau^{-1}$, $1 \leq j \leq k$. Patikriname, jog $(y_1, \ldots, y_k)$ - keitinio σ ciklas:

$$y_j\sigma = y_j(\tau\sigma_1\tau^{-1}) = (y_j\tau)(\sigma_1\tau^{-1}) = (x_j\sigma_1)\tau^{-1} = x_{j+1}\tau^{-1} = y_{j+1},$$

jei $j = 1, \ldots, k-1$, ir

$$y_k\sigma = (x_k\sigma_1)\tau^{-1} = x_1\tau^{-1} = y_1.$$

Išreiškę iš (5) keitinį σ_1 per σ, panašiai įsitikintume, jog ir bet koks σ ciklas atitinka σ_1 to paties ilgio ciklą.

Tarkime dabar, kad $\bar{k}(\sigma) = \bar{k}(\sigma_1)$. Imkime jų išraiškas ciklais. Tegu $(x_1x_2\ldots x_s)$ - bendrasis ciklas keitinyje σ, o $(y_1y_2\ldots y_s)$ - keitinyje σ_1. Atitinkamai sutvarkius ciklų išdėstymo eilę, sudarykime keitinį

$$\tau = \begin{pmatrix} \ldots x_1\, x_2\, \ldots\, x_s \ldots \\ \ldots y_1\, y_2\, \ldots\, y_s \ldots \end{pmatrix}.$$

Patikrinkime (5) formulę. Du aibės atvaizdžiai lygūs, jei jų reikšmės tuose pačiuose taškuose sutampa. Kaip vaizduoja x_j atvaizdis σ žinom, o į ką atvaizduoja tuos pačius skaičius $\tau\sigma_1\tau^{-1}$, surandame:

$$x_j(\tau\sigma_1\tau^{-1}) = (x_j\tau)\sigma_1\tau^{-1} = (y_j\sigma_1)\tau^{-1} = y_{j+1}\tau^{-1} = x_{j+1},$$

jei $j = 1, \ldots, s-1$. Panašiai gautume $x_k(\tau\sigma_1\tau^{-1}) = x_1$. Rastosios reikšmės sutampa su x_j vaizdais, naudojant σ. (5) lygybė įrodyta. $\diamond$

Jungtinmiai elementai grupėje $\mathbf{S}_n$ sudaro atskirą klasę, ją vienareikšmiškai atitinka struktūros vektorius $\bar{k}$, kurio sveikos neneigiamos koordinatės tenkina (4) lygybę.

4 teorema. *Jei simetrinės grupės $\mathbf{S}_n$ jungtinių elementų elementų klasė $S(\bar{k})$ apibrėžiama struktūros vektoriumi $\bar{k}$, tai joje yra*

$$|S(\bar{k})| = n! \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{k_j! j^{k_j}}$$

keitinių.

Įrodymas. Pasinaudojame 2.3 teoremos įrodymo idėja. Turėdami struktūros vektorių, pasidarykime k_j dėžučių, kuriose gali tilpti j, $1 \leq j \leq n$, skaičių:

$$\overbrace{(\cdot)\ldots(\cdot)}^{k_1}\ldots\overbrace{\underbrace{(\cdot,\ldots,\cdot)}_{j}\ldots\underbrace{(\cdot,\ldots,\cdot)}_{j}}^{k_j}\ldots\overbrace{\underbrace{(\cdot,\ldots,\cdot)}_{n}\ldots\underbrace{(\cdot,\ldots,\cdot)}_{n}}^{k_n}.$$

Bet kaip išdėstydami visus n skaičių į jas, t.y. panaudodami visus $n!$ kėlinių, gauname nurodytos struktūros keitinius. Atkreipkime dėmesį į pasikartojimus. Jų priežastys yra dvi:

(i) ciklų tvarka keitinyje yra nesvarbi;

(ii) j ilgio ciklą galima užrašyti j būdų, keičiant cikliškai jo elementus (žr. 1 teoremos įrodymą).

Kitaip tariant, naudojant įvairius kėlinius, to pačio didumo dėžutės su įrašytais skaičiais galėjo keistis vietomis ir duoti tuos pačius keitinius. Dėl (i) priežasties kievienas keitinys buvo pakartotas

$$k_1! \dots k_j! \dots k_n!$$

kartų, o dėl (ii) priežasties –

$$1^{k_1} \dots j^{k_j} \dots n^{k_n}$$

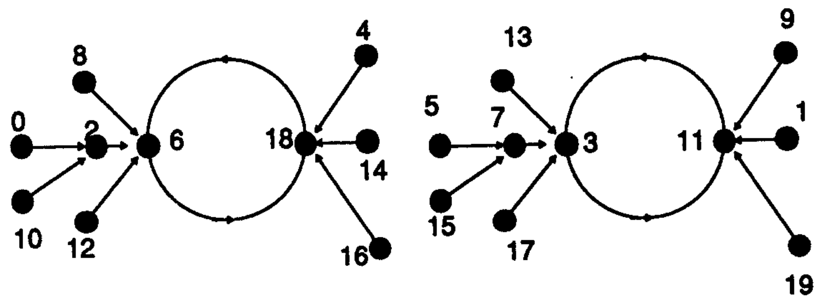
kartų. Padaliję $n!$ iš šių sandaugų, gauname reikiamą formulę. $\diamond$

8. Visi baigtinės aibės atvaizdžiai

Nagrinėsime visų n aibės $X = \{1, \dots, n\}$ atvaizdžių f į ją pačią aibę $\mathbf{T}_n$. Atvaizdžių sąsūkos atžvilgiu ji sudaro pusgrupį, dažnai vadinamą *simetriniu.* Kaip ir bijekcijų atveju f galime apibrėžti lentele, pavyzdžiui,

$$f = \begin{pmatrix} 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \\ 1,2,2,3,3,4,1,6,9,8 \end{pmatrix},$$

nurodančia, kad $f(1) = 1$, $f(2) = 2, f(3) = 2$ ir t.t. Galima vaizduoti ir digrafu, vadinamu *funkciniu* atvaizdžio digrafu (grafu). Atveju $f(x) = x^2 + 2\,(\mathrm{mod} 20)$ turime paveikslą:



Jame dvidešimties taškų aibė atvaizduota į ją pačią. Panašiai, kiekvieną iš n galios aibės atvaizdžių f į ją pačią, galime pavaizduoti numeruotuoju digrafu, kurio viršūnių aibė sutampa su aibės X elementais, o briauna (i, j) yra išvesta iš i į j tada ir tik tada, jei $j = f(i)$. Funkcinį grafą determinuojanti savybė galėtų būti formuluojama šitaip: kievienos viršūnės išėjimo laipsnis (iš jos išvestų briaunų skaičius) lygus vienam.

Matome, kad bet kokio funkcinio grafo struktūrą apibrėžia vektorius $\bar{k}(f) = (k_1, \dots, k_n)$, $1k_1 + \cdots + nk_n = n$, kuriame $k_j = k_j(f)$ žymi j eilės jungių grafo komponenčių skaičių.

Iš atvaizdžio pavaizdavimo lentele matyti, kad visų n aibės atvaizdžių arba funkcinių n eilės grafų skaičius $|\mathbf{T}_n| = n^n$. Tačiau jungių n eilės funkcinių n eilės grafų kiekį C_n surasti gana sunku. Tuo tikslu pasinaudokime eksponentinėmis genruojančiomis funkcijomis (e.g.f.). Pradžioje pastebėkime porą jų savybių.

Tegu

$$A(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n t^n}{n!}, \quad B(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n t^n}{n!} \quad -$$

sekų $\{a_n\}$ ir $\{b_n\}$ e.g.f. Tada

$$A(t)B(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} \bigg(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} \bigg).$$

Taigi, sandauga $A(t)B(t)$ yra apskliaustųjų sumų, kai $n = 0, 1, \dots$, e..g.f. Panašiai, sekos

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{k+1} b_{n-k} \tag{1}$$

e.g.f. bus $A'(t)B(t)$.

Teorema. *Tarkime, T_{nk} - skaičius n eilės funkcinių grafų, turinčių k jungių komponenčių, $T_{n,0} = 0$, $\pi(n)$ - skaičius jungių n eilės funkcinių grafų,*

$$T_n(t) = \sum_{k=1}^{n} T_{nk} t^k, \quad T_0(t) = 1, \quad \Pi(y) = \sum_{n\geq 1} \frac{\pi(n) y^n}{n!}.$$

Čia t, y - formalūs parametrai. Tada

$$T(t, y) = \sum_{n\geq 0} \frac{T_n(t) y^n}{n!} = \exp\{t\Pi(y)\}.$$

Įrodymas. Raskime rekurentųjį sąryšį tarp $T_{n+1,k}$ ir T_{nk}. Turėdami $(n+1)$-os viršūnės aibę, pastebėkime, jog $n+1$ viršūnė gali būti jungioje komponentėje, kurioje be jos dar yra $j = 0, 1, \dots, n$ kitų viršūnių. Turime $\binom{n}{j}$ jų parinkimo galimybių. Galime sudaryti $\pi(j+1)$ jungių funkcinių grafų su $n+1$ ir šiomis j viršūnių. Likusios $n-j$ viršūnių nepriklausomai gali būti $T_{n-j,k-1}$ funkciniuose grafuose. Taigi,

$$T_{n+1,k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \pi(j+1) T_{n-j,k-1}.$$

Padauginę iš t^k ir sudėję gautąsias lygybes pagal $k = 1, \dots, n+1$, turime

$$T_{n+1}(t) = t \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \pi(j+1) T_{n-j}(t).$$

Pagal (1) formulę

$$\sum_{n\geq 0} \frac{T_{n+1}(t)y^n}{n!} = T'_y(t,y) = t\biggl(\sum_{n\geq 0} \frac{\pi(n+1)y^n}{n!}\biggr)\biggl(\sum_{n\geq 0} \frac{T_n(t)y^n}{n!}\biggr).$$

Vadinasi,

$$T'_y(t,y) = t\Pi'(y)T(t,y).$$

Integruodami pagal y baigiame teoremos įrodymą. ◇

Išvada. *Teisingas sąryšis*

$$T(y) := T(1,y) = \sum_{n\geq 0} \frac{n^n y^n}{n!} = \exp\{\Pi(y)\}. \tag{2}$$

Iš šioje išvadoje gautojo sąryšio jau būtų galima išvesti funkcijos $\Pi(y)$ Tayloro koeficientų $\pi(n)$ formulę, bet lengviau tą padaryti pasitelkus sekančio skyrelio medžiagą.

9. Numeruotosios kombinatorinės struktūros

Dabar susipažinsime su abstraktesne apibrėžimų sistema, naudojama kombinatorinių struktūrų teorijoje. Galima įsivaizduoti, kad pradedama nuo komponenčių arba nuo jungių kombinatorinių struktūrų, nors toliau įvedamos sąvokos jungumo savybės nereikalauja.

Struktūros yra sudaromos iš elementų (atomų), nurodant jų vidinius ryšius. *Žymėtosiose* struktūrose tiems elementams priskiriami indeksai, dažniausiai skaičiai. Pastaruoju atveju struktūras vadinsime *numeruotosiomis.* Dvi tokios struktūros yra laikomos vienodomis, jei jų elementų numeracijai naudojami tie patys skaičiai ir, sutapatinus vienodai sunumeruotus elementus, vidiniai ryšiai sutampa. Skirtingai apibrėžiant vidinius ryšius tarp elementų, gaunamos skirtingos struktūrų klasės. Fiksuokime vieną tokią klasę $\mathcal{U}$ ir reikalaukime, kad kiekvienam $n \geq 0$ iš n elementų yra sudaroma tik baigtinis skaičius struktūrų, kurių eile (toliau žymėsime $|\cdot|$) laikysime n. Paprastai atvejis $n = 0$ atitinka vieną tuščiąją struktūrą, kuri įjungiama į nagrinėjamą klasę arba ne. $n \geq 1$ eilės struktūros elementų numeracijai naudosime tik skaičius $\{1,\ldots,n\}$. Visą n eilės struktūrų aibę žymėsime $\mathcal{U}_n \subset \mathcal{U}$, o $u_n = |\mathcal{U}_n|$ – jos elementų skaičių. Pagal susitarimą $u_0 \in \{0,1\}$. Taigi, klasę sudaro nesikertančių poaibiŲ sąjunga

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}_n, \quad u_n < \infty.$$

Formali eilutė

$$U(t) = \sum_{u\in\mathcal{U}} \frac{t^{|u|}}{|u|!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n t^n}{n!}$$

vadinama ne tik sekos $\{u_n\}$, $n \geq 0$, bet ir klasės $\mathcal{U}$ *eksponentine generuojančia funkcija* (toliau EGF).

Turėdami dvi numeruotų struktūrų klases $\mathcal{U}$ ir $\mathcal{V}$ ir apibrėšime trečią $\mathcal{W}$, vadinamą *skaidumo sandauga.* Ją sudaro visos *sutvarkytosios* poros $w = (u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ su visais galimais žemiau aprašytais elementų sunumeravimais. Jei $u \in \mathcal{U}$ elementai buvo numeruoti skaičiais $\{1, \ldots, m\}$, o $v \in \mathcal{V}$ – skaičiais $\{1, \ldots, n\}$, tai w numeracijai naudojami skaičiai $\{1, \ldots, m + n\}$, naujoji struktūra w laikoma $n + m$ eilės. Struktūrų u ir v elementai pernumeruojami, dabar naudojant skaičius $\{1, \ldots, m + n\}$, išlaikant buvusį jų sutvarkymą (eiliškumą) ir taip, kad u ir v elementų naujos numeracijos nesikirstų. Formaliai kalbant, skaidumo sandaugos w numeraciją apibrėžia bet kokios dvi monotoniškai didėjančios funkcijos $\theta_1 : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m+n\}$ ir $\theta_2 : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, m+n\}$, kurių reikšmių sritys nesikerta, o jų sąjunga yra visa aibė $\{1, \ldots, m + n\}$. Taigi u ir v skaidumo sandauga (ją žymėsim $w = u{*}v$) yra aibė sutvarkytųjų porų, besiskiriančių pernumeravimu. Aišku, kad būtent θ_i, $i = 1, 2$ monotoniškumas užtikrina ankščiau turėtą struktūrų u ir v elementų sutvarkymą, be to, daugindami skirtingas poras gausime skirtingas skaidumo sandaugas. Visos skaidumo sandaugos $w = u{*}v$, $u \in \mathcal{U},\ v \in \mathcal{V}$ sudaro klasių $\mathcal{U}$ ir $\mathcal{V}$ skaidumo sandaugą, kurią žymėsime $\mathcal{W} = \mathcal{U}{*}\mathcal{V}$. Pagal indukciją apibrėžiama ir bet kokio skaičiaus struktūrų bei jų klasių sandaugos. Atkreipkime dėmesį, kad pradėjome nuo sutvarkytųjų porų (u, v), todėl griežtai kalbant, $\mathcal{U} * \mathcal{V} \neq \mathcal{V} * \mathcal{U}$. Toliau žymėkime

$$\mathcal{U}^{<1>} = \mathcal{U},\ \mathcal{U}^{<2>} = \mathcal{U} * \mathcal{U},\ \ldots \mathcal{U}^{<n>} = \mathcal{U} * \mathcal{U}^{<n-1>}, \ldots.$$

Pradedant nuo nesutvarkytųjų porų, lygiai taip pat apibrėžiama *Abelio skaidumo sandaugas.* Jų žymėjimui naudosime simbolį $[*]$. Dabar

$$\mathcal{U}^{[1]} = \mathcal{U},\ \mathcal{U}^{[2]} = \mathcal{U}[*]\mathcal{U},\ \ldots,\ \mathcal{U}^{[n]} = \mathcal{U}[*]\mathcal{U}^{[n-1]}, \ldots$$

Kadangi yra $n!$ kėlinių, sandaugų $\mathcal{U}^{<n>}$ ir $\mathcal{U}^{[n]}$ EGF riša lygybės

$$U^{<n>}(t) = n! U^{[n]}(t), \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{1}$$

Skaidumo kompleksu vadinsime aibę

$$\mathcal{U}^{<*>} = \{\emptyset\} \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{U}^{<2>} \cup \ldots. \tag{2}$$

Tai nesikertančių aibių sąjunga. Panašiai

$$\mathcal{U}^{[*]} = \{\emptyset\} \cup \mathcal{U} \cup \mathcal{U}^{[2]} \cup \ldots \tag{3}$$

vadinsime *Abelio skaidumo kompleksu* arba *ansambliu.*

Šakniniai numeruotieji miškai bei funkciniai grafai sudaro ansamblius. Pirmuoju atveju pradinė struktūrų klasė buvo visų numeruotų medžių klasė, o antruoju – jungių funkcinių digrafų klasė. Pokštieji miškai sudaro skaidumo kompleksą (ne Abelio), nes juose į medžių tvarką yra atsižvelgiama.

1 teorema. *Tegu*

$$U(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{u_n t^n}{n!}, \quad V(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{v_n t^n}{n!} \quad -$$

kombinatorinių struktūrų klasių $\mathcal{U}$ bei $\mathcal{V}$ eksponentinės generuojančios funkcijos (EGF). Skaidumo sandaugos $\mathcal{W} = \mathcal{U} * \mathcal{V}$ EGF

$$W(t) = \sum_{n\geq 1} \frac{w_n t^n}{n!} = U(t)V(t). \tag{4}$$

Skaidumo komplekso $\mathcal{U}^{<*>}$ EGF lygi

$$U^{<*>}(t) := \sum_{w\in\mathcal{U}^{<*>}} \frac{t^{|w|}}{|w|!} = (1-U(t))^{-1}, \tag{5}$$

o Abelio skaidumo komplekso $\mathcal{U}^{[*]}$ EGF –

$$U^{[*]}(t) := \sum_{w\in\mathcal{U}^{[*]}} \frac{t^{|w|}}{|w|!} = e^{U(t)}. \tag{6}$$

Įrodymas. Pastebėkime, kad n eilės skaidumo sandaugų $w = u * v$ galime sudaryti

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k v_{n-k},$$

nes pastaroji lygybė nurodo, kad fiksuotoje sandaugoje viena komponentė yra k, o kita – $(n-k)$ eilės, be to, pirmoji komponentė yra numeruota bet kokiu k indeksų poaibiu iš $\{1,\ldots,n\}$. Taigi,

$$\frac{w_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!}\,\frac{v_{n-k}}{(n-k)!}.$$

Iš čia išplaukia (4) formulė.

Pasinaudoję ja bei (2) lygybe, gauname

$$U^{<*>}(t) = \sum_{n\geq 0}\sum_{w\in\mathcal{U}^{<n>}} \frac{t^{|w|}}{|w|!} = \sum_{n\geq 0} U(t)^n = (1-U(t))^{-1}.$$

Abelio skaidumo kompleksui, pasinaudoję (1), turime bei

$$U^{[*]}(t) = \sum_{n\geq 0}\sum_{w\in\mathcal{U}^{[n]}} \frac{t^{|w|}}{|w|!} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{w\in\mathcal{U}^{<n>}} \frac{t^{|w|}}{|w|!} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} F(t)^n = e^{U(t)}.$$

◇

Palyginkime gautą rezultatą su 8 skyrelio teoremos išvada. Ji teigia, kad funkcinių digrafų klasės EGF tenkina lygybę

$$T(y) = \sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{n!} y^n = \exp\left\{ \sum_{n\geq 1} \frac{\pi(n)}{n!} y^n \right\},$$

čia $\pi(n)$ – jungių funkcinių digrafų skaičius. Kadangi funkciniai digrafai yra jungių digrafų nesutvarkytieji rinkiniai ir funkciniai digrafai yra jungių digrafų generuotas ansamblis, pastarasis sąryšis yra 1 teoremos išvada.

Panagrinėkime kitą pavyzdį. Tegu $\mathcal{U}$ keitinių ciklų klasė. Turėdami $n \geq 1$ skaičių $\{1, \ldots, n\}$ galime sudaryti $n!$ kėlinių $(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n)$. Kadangi ciklams galioja

$$(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n) = (i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n, i_1) = \cdots = (i_n, i_1, \ldots, i_{n-1}),$$

gausime $(n-1)!$ ciklų. Vadinasi, tokių ciklų klasės EGF lygi

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(n-1)!}{n!} t^n = \log(1-t)^{-1}.$$

Abelio skaidumo sandauga $\mathcal{U}^{[n]}$ duotų visus keitinius, sudarytus iš n ciklų. Jos EGF lygi

$$U^{[n]}(t) = \frac{1}{n!} \log^n (1-t)^{-1}.$$

Keitiniai sudarytų ciklų klasės generuotą ansamblį, todėl jo EGF

$$\mathcal{U}^{<*>} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \log^n (1-t)^{-1} = \frac{1}{1-t},$$

ką mes turėjome ir anksčiau.

Ciklus galime sudarinėti ir iš kitokių negu skaičiai kombinatorinių struktūrų, pvz., medžių. Kokia bus EGF, jei pradėsime nuo struktūrų klasės su EGF $A(t)$?

2 teorema. *Iš kombinatorinių struktūrų klasės $\mathcal{A}$ su EGF $A(t)$ sudarytų ciklų klasės EGF bus lygi*

$$C(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{n!} t^n = \log\big(1 - A(t)\big)^{-1}.$$

Įrodymas. Kaip matėme anksčiau, n eilės sutvarkytų rinkinių, daromų iš $\mathcal{A}$, EGF lygi $A^n(t)$; ciklams kiekvienas jos koeficientas yra n kartų mažesnis. Tad,

$$C(t) = A(t) + \frac{A^2(t)}{2} + \cdots + \frac{A^n(t)}{n} + \cdots.$$

Tai ir yra 2 teoremos tvirtinimas. $\diamond$

Iš 1 ir 2 teoremų išplaukia įdomių kompleksų generuojančių funkcijų savybių.

1 išvada. *Tegu*

$$D(t) := \sum_{n\geq 1} \frac{d_n t^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} \frac{n^{n-1} t^n}{n!} \quad -$$

Cayley'io medžių EGF. Tada $D(t) = te^{D(t)}$, kai $|t| < e^{-1}$.

Įrodymas. Pasinaudoję Stirlingo formule, nesunkiai nustatome eilutės $D(t)$ konvergavimo sritį $|t| < e^{-1}$. Pastebime, kad šakniniai miškai sudaro Cayley'io medžių ansamblį. Vadinasi, pagal 1 teoremą jų EGF išsireiškia per $D(t)$. Gauname

$$Q(t) := \sum_{n\geq 0} \frac{q_n t^n}{n!} = e^{D(t)}.$$

Pagal 6.2 teoremą $q_n = d_{n+1}/(n+1)$, todėl

$$Q(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{d_{n+1} t^n}{(n+1)!} = t^{-1} D(t).$$

$\diamond$

2 išvada. *Tegu* $\Pi(t)$ *– jungių funkcinių digrafų EGF, o* $T(t)$ *– visų funkcinių digrafų ansamblio EGF. Tai srityje* $|t| < e^{-1}$

$$\Pi(t) = \log\big(1 - D(t)\big)^{-1}, \qquad T(t) = \frac{1}{1 - D(t)}.$$

Įrodymas. Kiekviena funkcinio digrafo komponentė yra sudaryta iš ciklo ir Cayley'io medžių, kurių briaunos šįkart turi kryptis nukreiptas į šaknis, esančias šiame cikle. Medžiai gali būti ir pirmos eilės, tai bus ciklo viršūnės. Ciklas apibrėžia ir medžių išdėstymo tvarką, sukeitus bent du iš jų, gaunamas kito atvaizdžio digrafas. Kitaip tariant, į jungią funkcinio digrafo komponentę galime žiūrėti kaip į medžių ciklą. Jei $\pi(n)$ – n eilės jungių funkcinių digrafų skaičius, $n \geq 1$, tai šis skaičius reikš ir tos pačios eilės medžių ciklų kiekį. Pagal 2 teoremą medžių ciklų klasės EGF lygi

$$\log\big(1 - D(t)\big)^{-1}.$$

Kadangi $\mathcal{T}$ yra šios klasės generuotas ansamblis, pagal 1 teoremą gauname

$$T(t) = \exp\Big\{\log\big(1 - D(t)\big)^{-1}\Big\} = \big(1 - D(t)\big)^{-1}. \tag{6}$$

Išvada įrodyta. $\diamond$

Naudojant 1 ir 2 išvadas ir šią lygybę nebesunku rasti $\pi(n)$ bei jo asimptotiką, kai $n \to \infty$.

Lagrange lema. *Tegu funkcija* $f(z)$ *yra netiesiogiai apibrėžta lygybės*

$$f(z) = z\phi(f(z)) \tag{7}$$

pagalba, kai $\phi(u)$ *– analizinė taško* $u = 0$ *aplinkoje ir* $\phi(0) = 1$. *Jei* $g(z)$ *yra analizinė taško* $z = 0$ *aplinkoje, tai sudėtinė funkcija* $g(f(z))$ *irgi yra analizinė kažkokioje nulinio taško aplinkoje, be to, jos* n*-asis Tayloro koeficientas lygus funkcijos* $\phi(u)^n g'(u)$ $(n-1)$*-am Tayloro koeficientui* c_{n-1}*, padalytam iš* n.

Įrodymas. Tegu $u = f(z)$ ir $z = z(u)$ – jai atvirkštinė funkcija. Iš (7) turime, kad $z = u/\phi(u)$. Pagal lemos sąlygas abi yra analizinės tam tikrose nulinių taškų aplinkose. Todėl naudodami Koši formulę su pakankamai mažais $\rho, \rho_1 > 0$, gauname

$$\begin{aligned} c_{n-1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\rho} \frac{\phi(u)^n g'(u)}{u^n}\, du = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|=\rho} \frac{g'(u)}{z(u)^n}\, du = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho_1} \frac{g'(f(z))f'(z)}{z^n}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho_1} \frac{d\left(g(f(z))\right)}{z^n} = \\ &= \frac{n}{2\pi i} \int_{|z|=\rho_1} \frac{g(f(z))\, dz}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

Įžiūrėję pastarojo integralo prasmę, baigiame lemos įrodymą. $\diamond$

3 teorema. *Jungių $n \geq 1$ eilės funkcinių grafų skaičius*

$$\pi(n) = (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} = n! e^n \left(\frac{1}{2n} + O(n^{-3/2}) \right),$$

Įrodymas. Teoremos 1 pirmoje išvadoje gavome $D(z) = ze^{D(z)}$. Pagal (6) reikia rasti n-ą funkcijos $\log(1 - D(z))^{-1}$ Tayloro koeficientą ir padauginti jį iš $n!$. Pasinaudojame Lagrange lema, kai $\phi(u) = e^u$, o $g(u) = \log(1-u)^{-1}$, ir gauname $\phi^n(u)g'(u) = e^{nu}/(1-u)$. Nesunkiai randame $(n-1)$-ą Tayloro koeficientą. Jis lygus $\sum_{0 \leq k \leq n-1} n^k/k!$. Padaliję iš n ir padauginę iš $n!$, randame $\pi(n)$ išraišką.

Sumos aproksimavimui pasinaudokime Bery-Eseno teorema apie konvergavimo greitį centrinėje ribinėje teoremoje. Tegu $S_n = Z_1 + ... + Z_n$ – nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių Poissono dydžių su vienetiniu parametru ($\mathbf{E}Z_j = 1$) suma. Todėl S_n irgi Poissono dydis su parametru n, o

$$\begin{aligned} e^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^k}{k!} &= P(S_n \leq n-1) = P((S_n - n)/\sqrt{n} \leq -1/\sqrt{n}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1/\sqrt{n}} e^{-u^2/2}\, du + O(n^{-1/2}) = \frac{1}{2} + O(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Įstatę šį įvertį į $\pi(n)$ išraišką, baigiame teoremos įrodymą. $\diamond$

Palyginimui pastebėkime, kad jungiųjų n eilės funkcinių digrafų ir visų tokios eilės digrafų santykis

$$\frac{\pi(n)}{n^n} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \quad n \to \infty.$$

Panašiai išvystoma ir nenumeruotųjų kombinatorinių struktūrų teorija.

10. Nenumeruotųjų struktūrų kompleksai

Nagrinėti nenumeruotų struktūrų pavyzdžiai turi bendrą bruožą: sudėtingesni objektai yra sudaryti iš atskirų dalių. Polinomus sudaro pirminiai daugikliai, binariuosius medžius - pomedžiai, į kurių tvarką yra atsižvelgiama . Atskiros dalys gali būti net lygios. Nagrinėjamus objektus, turinčius apibrėžtą natūralųjį skaičių *svorį* (atskirais atvejais tai gali būti laipsnis, eilė ir pan.), vadinkime *svorinėmis kombinatorinėmis struktūromis.* Tegu $\mathcal{P}$ yra tam tikra kombinatorinių struktūrų klasė, $\kappa \in \mathcal{P}$ viena struktūra, o $w(\kappa)$ - jos svoris. Reikalaukime, kad klasėje $\mathcal{P}$ yra tik baigtinis n svorio struktūrų skaičius

$$\pi_n = |\{\kappa \in \mathcal{P} : \ w(\kappa) = n\}|, \quad n \geq 1.$$

Bet koks rinkinys

$$\sigma := \{\kappa_1, \ldots, \kappa_s\}, \quad \kappa_i \in \mathcal{P}, \quad 1 \leq i \leq s,$$

gal būt pasikartojančių elementų gali būti laikomas nauja kombinatorine struktūra. Tuo tikslu, reikia suteikti jai svorį. Natūralu jį apibrėžti lygybe

$$w(\sigma) = w(\kappa_1) + \cdots + w(\kappa_s).$$

Tuščiajam rinkiniui $\sigma = \emptyset$ suteikime nulinį svorį. Taip apibrėžtos struktūros σ vadinamos *kartotinėmis aibėmis* (*multiaibėmis*), o jų visuma, įskaitant ir tuščią, - aibės $\mathcal{P}$ *kartotinių poaibių* (*multiaibių*) struktūra. Ją žymėkime $K(\mathcal{P})$.

Pirminių polinomų, kurių vyriausias koeficientas lygus vienam, virš baigtinio kūno rinkinys yra geriausias tokios kartotinės struktūros pavyzdys. Sutapatinę ją su rinkinio polinomų sandauga, visų polinomų aibę galėtume laikyti kartotine pirminių polinomų struktūra. Aišku, kad svorių vaidmenį vaidina polinomų laipsniai; $\pi_n = \pi(n)$ - skaičių n-ojo laipsnio pirminių polinomų - nagrinėjome 3 skyrelyje.

Žvelgdami į natūraliojo skaičiaus adityviojo skaidinio dėmenis kaip į natūraliųjų skaičių aibės kartotinį poaibį, tokius skaidinius irgi galėtume vadinti kartotinių poaibių struktūra, kurioje svorio vaidmenį vaidina natūraliųjų skaičių didumai. Dabar $\pi_k = 1$ su kiekvienu $k \in \mathbf{N}$.

Pradėdami nuo $\mathcal{P}$ poaibių, (dabar pasikartojančių elementų κ_i neimtume), panašiai gautume aibės $\mathcal{P}$ *poaibių struktūrą.* Ją žymėkime $P(\mathcal{P})$.

Formalias laipsnines eilutes

$$\Pi(z) = \sum_{\kappa \in \mathcal{P}} z^{w(\kappa)} = \sum_{n=0} \Big(\sum_{w(\kappa)=n} 1 \Big) z^n =: \sum_{n=0} \pi_n t^n,$$

$$K(z) = \sum_{\sigma \in K(\mathcal{P})} z^{w(\sigma)} = \sum_{n=0} \Big(\sum_{w(\sigma)=n} 1 \Big) z^n =: \sum_{n=0} k_n t^n$$

ir

$$P(z) = \sum_{\sigma \in P(\mathcal{P})} z^{w(\sigma)} = \sum_{n=0} \Big(\sum_{w(\sigma)=n} 1 \Big) z^n =: \sum_{n=0} p_n z^n.$$

vadinkime atitinkamų struktūrų $\mathcal{P}$, $K(\mathcal{P})$ ir $P(\mathcal{P})$ arba sekų $\{\pi_n\}$, $\{k_n\}$ bei $\{p_n\}$ *generuojančiomis funkcijomis.* Raskime jų sąryšius.

1 teorema. *Teisingos formalios lygybės*:

$$K(z) = \exp\Big\{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Pi(z^m)}{m}\Big\},$$

$$P(z) = \exp\Big\{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \Pi(z^m)}{m}\Big\}.$$

Įrodymas. Kaip ir 3 skyrelyje gauname

$$k_n = \sum_{\substack{\bar{k}\in\mathbf{Z}^{+n} \\ 1k_1+\cdots+nk_n=n}} \prod_{j=1}^{n} \binom{\pi_j + k_j - 1}{k_j}.$$

Vadinasi, pakartoję ankstesnius skaičiavimus, įrodytume lygybę

$$K(z) = \sum_{n\geq 0} k_n z^n = \prod_{j\geq 1} (1 - z^j)^{-\pi_j}.$$

Toliau panaudodami logaritminės funkcijos skleidimo Tayloro eilute formulę, gauname

$$K(z) = \exp\Big\{\sum_{j\geq 1} \pi_j \sum_{m\geq 1} \frac{z^{mj}}{k}\Big\} = \exp\Big\{\sum_{m\geq 1} \frac{1}{m}\Pi(z^m)\Big\}.$$

Antrosios įrodymui pastebėkime, kad

$$p_n = \sum_{\substack{\bar{k}\in\mathbf{Z}^{+n} \\ 1k_1+\cdots+nk_n=n}} \prod_{j=1}^{n} \binom{\pi_j}{k_j}.$$

Be to,

$$\prod_{j\geq 1} (1 + z^j)^{\pi_j} = \prod_{j\geq 1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\pi_j}{k} z^{kj} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{\substack{\bar{k}\in\mathbf{Z}^{+n} \\ 1k_1+\cdots+nk_n=n}} \prod_{j=1}^{n} \binom{\pi_j}{k_j} = P(z).$$

Logaritmuodami sandaugą, kaip ir anksčiau iš čia gautume antrąją lemos lygybę. ◇

Turėdami keletą skirtingų pradinių struktūrų klasių $\mathcal{P}_k$, $k \geq 2$, galėtume sudaryti dar įdomesnių naujų struktūrų. Dabar apibrėšime sekų struktūrą. Tegu $\mathcal{P}'$ ir $\mathcal{P}''$ dvi struktūros. *Sutvarkytųjų porų struktūra* vadinsime $\mathcal{P}' \times \mathcal{P}''$, kurioje poros $\sigma := (\kappa', \kappa'')$ svoriu laikoma $w(\sigma) = w(\kappa') + w(\kappa'')$. Panašiai apibrėšime ir $\mathcal{P}$ laipsnius.

1 teorema. *Jei π'_k ir π''_k yra k-ojo svorio struktūrų aibėse $\mathcal{P}'$ ir $\mathcal{P}''$ skaičiai, tai n-jo svorio sutvarkytųjų porų struktūrų yra*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \pi'_k \pi''_{n-k}.$$

Įrodymas. Išplaukia iš apibrėžimų. ◇

Aibės

$$\{\emptyset\} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{P}^2 \cup \dots$$

elementai vadinami $\mathcal{P}$ *sekų struktūromis.* Žymėkime ją $S(\mathcal{P})$.

2 teorema. *Sekų struktūros generuojanti funkcija lygi*

$$\sum_{\sigma \in S(\mathcal{P})} z^{w(\sigma)} = 1 + \Pi(z) + \Pi(z)^2 + \dots = \frac{1}{1 - \Pi(z)}.$$

Įrodymas. Išplaukia iš apibrėžimų. ◇

Dar kartą prisiminkime binariuosius medžius ir Katalano skaičius. Kadangi kiekvienas binarusis medis T yra arba viena išorinė viršūnė $\circ$, arba vidinė viršūnė $*$ ir dviejų binariųjų medžių seka, todėl gauname tokią formalią schemą:

$$\{T\} = \{\circ\} \cup \{(*, T, T)\}.$$

Čia paskutinė aibė yra sudaryta iš sekų. Priskirdami išorinėms viršūnėms vienetinius svorius, o vidinėms viršūnėms - nulius, gautume nagrinėtas struktūras. Užrašę atitinkamas generuojančias funkcijas, gauname lygybę

$$C(z) := \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n = z + 1 \cdot C(z) \cdot C(z) = z + C^2(z),$$

kurią jau buvome 4 skyrelyje.

Kaip ir praeitame skyrelyje galėtume apibrėšti ir nenumeruotų struktūrą ciklų klasę. Reziumuodami akcentuosime, kad formalus naujų struktūrų klasių sudarymas duoda ir jų generuojančių funkcijų ryšius. Panaudodami pastaruosius, galime naujas struktūras suskaičiuoti.

II. EKSTREMALIOJI AIBIŲ TEORIJA

1. Dirichlet principo taikymas

Nagrinėsime tam tikras baigtines aibes elementų su įvairiais parametrais. Iš aibių apibrėžimo dažnai yra išvedami įvairūs tų parametrų sąryšiai. Visada kyla klausimai, ar tokių rezultatų mes negalime pagerinti. Atsakymas yra neigiamas, jei pavyksta rasti tokią aibę, kuriai mūsų įrodytas sąryšis yra nepagerinamas. Tokios aibės vadinamos *ekstremaliosiomis* šiam sąryšiui. Tas ypač aktualu grafų teorijoje, kurioje kai kada labai sunku įsivaizduoti, ar iš viso yra grafų su norimois savybėmis. Naudojamos matematinės priemonės dažnai nebūna sudėtingos.

Prisiminkime akivaizdų faktą, paprastai priskiriamą Dirichlet (P.G.L. Dirichlet, 1805–1859).

Dirichlet principas. *Jei m rutulių yra sudėti į $n < m$ dėžučių, tai vienoje iš jų yra bent du rutuliai.*

Ne visada jo taikymas yra toks akivaizdus kaip jis pats. Štai trejetas pavyzdžių.

1 pavyzdys. *Bet kokiame $(n+1)$-o elemento poaibyje, išrinktame iš aibės $\{1, \dots, 2n\}$, yra du tarpusavyje pirminiai skaičiai.*

Įsitikinkite savarankiškai.

2 pavyzdys. *Bet kokiame $(n+1)$-o elemento poaibyje, išrinktame iš aibės $\{1, \dots, 2n\}$, yra du vienas kitą dalijantys skaičiai.*

Įrodymas. Tegu A – išrinktasis poaibis, $|A| = n + 1$. Kiekvieną $a \in A$ galime vienareikšmiškai išreikšti pavidalu $a = 2^k b$ su $k \geq 0$ ir nelyginiu skaičiumi b. Todėl $b \in \{1, 3, \dots, 2n - 1\}$. Yra tik n galimybių dėl b. Vadinasi, du skaičiai iš A turės tą pačią nelyginę dalį b. Aibėje A rasime du skaičius $2^k b$ ir $2^l b$. Aišku, kad arba $k < l$, arba $k > l$. Pirmuoju atveju pirmasis skaičius dalija antrąjį, o antruoju - atvirkščiai. $\diamond$

Dar labiau netikėtas yra toks pavyzdys.

3 pavyzdys. *Tegu $a_1, \dots, a_n$ seka, gal būt, pasikartojančių natūraliųjų skaičių. Joje egzistuoja gretimų narių posekis $a_k, \dots, a_l$, $1 \leq k < l \leq n$, toks, kad suma*

$$a_k + \dots + a_l$$

yra n kartotinis.

Įrodymas. Imkime aibes

$$N := \{0, a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + \dots + a_n, \qquad R = \{0, 1, \dots, n - 1\}$$

ir apibrėžkime atvaizdį $f : N \to \mathbf{R}$ pagal dalybos iš n liekaną:

$$m \equiv f(m) (\mathrm{mod} n), \quad m \in N.$$

Kadangi $|N| = n + 1 > n = |R|$, tai pagal Dirichlet principą aibėje N egzistuoja dvi sumos su ta pačia dalybos iš n liekana. Vadinasi, kažkokiai porai $k < l$ turėsime

$$a_1 + \dots + a_k \equiv a_1 + \dots + a_l (\mathrm{mod} n).$$

Vadinasi, skaičių, esančių abiejose lyginio pusėse skirtumas dalijasi iš n. Tai ir yra mūsų suformuluotas teiginys. $\diamond$

Performuluokime Dirichlet principą naudodami atvaizdžius. Tegu M ir N – baigtinės aibės, o $f : M \to N$ – atvaizdis. Elemento $a \in N$ pirmvaizdį žymėkime $f^{-1}(a)$. Kitaip tariant,

$$f^{-1}(a) = \{b \in M : \ f(b) = a\}.$$

Iš atvaizdžio apibrėžimo turime, jog

$$f^{-1}(a) \cap f^{-1}(b) = \emptyset,$$

be to,

$$M = \bigcup_a f^{-1}(a), \qquad |M| = \sum_a |f^{-1}(a)|, \tag{1.1}$$

Lema. *Jei $|M| = m > n = |N|$ ir $f : M \to N$ – atvaizdis, tai egzistuoja toks $a \in N$, kad*

$$|f^{-1}(a)| \geq \lceil m/n \rceil$$

Čia $\lceil u \rceil = \min\{k \in \mathbf{N} : \ k \geq u\}$ – mažiausias sveikasis skaičius, nemažesnis už u.

Įrodymas. Iš Dirichlet principo išplaukia tik nelygybė $|f^{-1}(a)| \geq 2$ bent vienam $a \in N$. Bet galime pastebėti, kad prielaida, jog $|f^{-1}(a)| < m/n$ kiekvienam $a \in N$ yra negalima dėl šios prieštaros. Iš (1.1) turime

$$m = \sum_a |f^{-1}(a)| < \frac{m}{n} n = m.$$

Taigi, bent vienam a turi būti $|f^{-1}(a)| \geq m/n$. Kalbame apie sveikuosius skaičius, todėl iš čia gauname teoremos teiginį. $\diamond$

Dabar galime pereiti prie kombinatorikos problemų.

1 teorema. *Tegu $m, n \in N$ ir $a_1, \ldots, a_{mn+1}$ – bet kokia skirtingų realiųjų skaičių seka iš $(mn+1)$-o nario. Joje egzistuoja monotoniškai didėjantis $(n+1)$-o nario posekis, arba monotoniškai mažėjantis $(m+1)$-o nario posekis. Galimi ir abu variantai.*

Įrodymas. Dabar Dirichlet principo taikymo galimybė vargu ar įžiūrima. Reikia įrodyti posekių

$$a_{i_1} < \cdots < a_{i_{n+1}}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_{n+1} \leq mn+1$$

arba

$$a_{j_1} > \cdots > a_{j_{m+1}}, \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_{m+1} \leq mn+1$$

egzistavimą.

Tegu t_i – **ilgiausio** didėjančio posekio, prasidedančio skaičiumi a_i, ilgis. Jei kažkokiam $t_i \geq n+1$, teorema įrodyta.

Tegul $t_i \le n$ visiems $i \le mn+1$. Aibėje $M := \{a_1, \ldots, a_{mn+1}\}$ apibrėžkime atvaizdį $f : M \to N := \{1, \ldots, n\}$ tokiu būdu:

$$f(a_i) = t_i, \quad 1 \le i \le mn+1.$$

Pagal lemą matome, kad egzistuoja toks $s \in N$, dėl kurio lygybė $f(a_i) = s$ pasikartos ne mažiau negu

$$\left\lceil \frac{mn+1}{n} \right\rceil = m+1$$

kartų. Nekeisdami jų išsidėstymo tvarkos sekoje, šiuos skaičius a_i sužymėkime

$$a_{j_1}, \cdots, a_{j_{m+1}}, \quad 1 \le j_1 < \cdots < j_{m+1} \le mn+1.$$

Nagrinėkime du gretimus šios sekos narius. Jei kažkokiai porai $a_{j_k} < a_{j_{k+1}}$, tai pradėdami a_{j_k} ir prijungdami didėjantį posekį, prasidedantį nuo $a_{j_{k+1}}$ ir turintį jau s narių, sudarytume didėjantį $(s+1)$-o nario posekį, prasidedantį nuo a_{j_k}. Bet tai prieštara. Vadinasi, $a_{j_k} > a_{j_{k+1}}$ su bet kokiais $1 \le k \le m+1$. Taigi, išrinkome $(m+1)$-o nario mažėjantį posekį. $\diamond$

Panagrinėkime ekstremaliąją problemą, kurią nesunku interpretuoti grafų teorijos sąvokomis. Tegu $N = \{1, \ldots, n\}$, $n \ge 3$ ir π_j, $j \le m$, – šios aibės kėliniai. Problema:

Koks yra mažiausias m, kad paėmus bet kokį trejetą $\{a, b, c\} \subset N$ tarp šių kėlinių būtų toks π_j, kad jame c eitų ir po a, ir po b?

Galima ir tokia interpretacija grafų teorijoje. Įsivaizduokime pilnąjį K_n numeruotąjį grafą. Kėlinys atitiktų $n-1$ ilgio (Hamiltono) taką jame. Problemoje klausiama: koks yra minimalus takų skaičius, kad bet kokioms trims viršūnėms $a, b, c \in V$ bent vienu taku eidami, į c patektume praėję ir a, ir b? Toks minimalus skaičius vadinamas K_n *dimensija* ir žymimas $\dim K_n$. Be to, sakoma, kad kėliniai $\{\pi_j, : j \le m\}$, kai toks viršūnių apėjimas yra galimas, *reprezentuoja* K_n.

Pvz., $\dim K_n = 3$, jei $n = 3, 4$, bet $\dim K_5 = \ldots, = \dim K_{12} = 4$, o $\dim K_{13} = 5$. Grafą K_4 reprezentuoja

$$(1,2,3,4), \qquad (2,4,3,1), \qquad (1,4,3,2).$$

O grafą K_{12} – kėliniai

$$(1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,12,4), \qquad (2,3,4,8,7,6,5,12,11,10,9,1),$$

$$(3,4,1,11,12,9,10,6,5,8,7,2), \qquad (4,1,2,10,9,12,11,7,8,5,6,3).$$

2 teorema. *Kai $n \ge 3$, yra teisinga nelygybė*

$$\dim K_n \ge \log_2 \log_2 n.$$

Įrodymas. Pastebėkime, kad seka $\dim K_n$, $n \ge 3$, yra monotoniškai didėjanti plačiąja prasme. Iš tiesų, suradę K_{n+1} reprezentaciją ir iš visų kėlinių išmetę skaičių $n+1$, gautume K_n reprezentaciją. Tad, šio grafo dimensija gali būti tik mažesnė negu $\dim K_{n+1}$.

Teoremos formuluotė pasufleruoja, kad reikia imti seką

$$n_k = 2^{2^k} + 1, \quad k = 0, 1, \ldots$$

ir visas n reikšmes patalpinti intervaluose

$$n_k \le n < n_{k+1}.$$

Jei įrodytume, kad

$$\dim K_{n_k} \ge k + 1, \tag{1.2}$$

tai pasinaudoję monotoniškumu ir intervalų apibrėžimu, gautume norimą įvertį:

$$\dim K_n \ge \dim K_{n_k} \ge k + 1 = \log_2 \log_2 \big(n_{k+1} - 1\big) \ge \log_2 \log_2 n.$$

Tegu (1.2) negalioja. Vadinasi, $\dim K_{n_k} \le k$. Todėl egzistuoja reprezentacija $\pi_1, \ldots \pi_k$, sudaryta iš aibės $N_k := \{1, 2 \ldots, n_k\}$ kėlinių. Taikysime 1 teoremą apie monotoniškų posekių egzistavimą. Pastebėkime, kad

$$n_k = 2^{2^{k-1}} \times 2^{2^{k-1}} + 1.$$

Vadinasi, kėinyje π_1 egzistuoja monotoniškas $2^{2^{k-1}} + 1$ ilgio posekis, kurį pažymėkime A_1. Jo elementai yra kažkaip išsidėstę keitinyje π_2. Nemaišydami tvarkos, vėl pagal 1 teoremą iš jų galime išrinkti monotonišką $2^{2^{k-2}} + 1$ ilgio posekį, kurį pažymėkime A_2. Procesą pratęsę, po k žingsnių kėlinyje π_k būsime išrinkę monotonišką posekį A_k iš $2^{2^{k-k}} + 1 = 3$ ilgio posekį, kurį pažymėkime $A_k = \{a, b, c\}$. Šie trys elementai sudaro monotoniškus posekius $a < b < c$ arba $a > b > c$ visuose kėliniuose $\pi_1, \ldots, \pi_k$. Vadinasi, jokiame iš jų b neina nei po a, nei po c. Šis kėlinių rinkinys nereprezentuoja K_{n_k}.

Prieštara įrodo teoremos tvirtinimą. $\diamond$

Istorinei apžvalgai paminėsime, kad tikslų viršutinį $\dim K_n$ rėžį 1972 metais gavo J. Spencer, o 1992 metais P. Erdős, ?. Szemeredi ir ?. Trotter įrodė asimptotinę formulę

$$\dim K_n \sim \log_2 \log_2 n + \big(1/2 + o(1)\big) \log_2 \log_2 \log_2 n, \quad n \to \infty.$$

Dėmesys šiam uždaviniui nenutrūko ir iki šiol. S. Hosten ir W.D. Morris 1999 metais surado greitą algoritmą, kaip tiksliai skaičiuoti $\dim K_n$. Jis, pavyzdžiui, patikrino, kad

$$\dim K_n \le 7 \Longleftrightarrow n \le 1422564.$$

Įsivaizduokite keitinių skaičių, kai n yra toks didelis!

2. Perskaičiuokime dukart

Jau ne kartą naudojomės tokiu principu: išvesdami įvairių aibių elementų skaičiaus lygybes, tos aibės elementus suskaičiuodavome dviem skirtingais būdais. Šitame skyrelyje taip ir elgsimės. Pradžioje truputį formalizuokime patį principą.

Tegu A ir B dvi aibės, o $S \subset A \times B$. Jis vadinamas sąryšiu. Jei $a \in A$, $b \in b$ ir $(a, b) \in S$, tai sakoma, kad a ir b susieti sąryšiu S. Moksliškiau kalbant, sakytume: *yra incidentūs S*. Tegu r_a – skaičius tokių $b \in B$, kad $(a, b) \in S$ ir q_b – skaičius tokių $a \in A$, kad $(a, b) \in S$. Mūsų aptariamasis principas turi tokią formalią išraišką:

$$\sum_{a \in A} r_a = |S| = \sum_{(a,b) \in S} 1 = \sum_{b \in B} q_b. \tag{2.1}$$

Čia vidinė dvilypė suma yra išreikšta kartotinėmis sumomis su skirtinga sumavimo tvarka ir nieko įrodinėti nereikia.

Vėl panagrinėkime porą paprastų pavyzdžių.

1 pavyzdys. Tegu $A = \{1, \dots n\} = B$, o $S = \{(m, d) : \ d|m\}$, čia $d|m$ reiškia "d dalija m". Formulė (2.1) dabar atrodytų taip:

$$\sum_{m \le n} \sum_{d|m} 1 = \sum_{\substack{d, m \le n \\ d|m}} 1 = \sum_{d \le n} \sum_{\substack{m \le n \\ m \equiv 0 (\mathrm{mod} d)}} 1.$$

Jei $d(m)$ žymėtų skaičiaus m natūraliųjų daliklių skaičių, o $[u]$ – realaus skaičiaus sveikąją dalį, tai iš čia išvestume formulę

$$\sum_{m \le n} d(m) = \sum_{d \le n} [\frac{n}{d}] = n \sum_{d \le n} \frac{1}{d} + O\biggl(\sum_{d \le n} 1\biggr) = n \log n + O(n).$$

2 pavyzdys. Nagrinėkime grafą $G = (V, E)$ su viršūnėmis $v \in V$ ir briaunomis $e \in E$. Tegu $S = \{(v, e) : \ v \ \text{incidenti}\, e\}$. Tada

$$\delta(v) = \sum_{\substack{e \\ e \,\text{inc.}\, v}} 1 \quad - \quad \text{viršūnės laipsnis},$$

o

$$\sum_{\substack{v \\ v \,\text{inc.}\, e}} 1 = 2,$$

nes tik dvi viršūnės yra incidenčios briaunai. Todėl (2.1) įrodo Eulerio "delnų paspaudimo" lemą:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2 \sum_{e \in E} 1 = 2|E|.$$

Po lengvo apšilimo imkimės grafų ekstremaliosios problemos:

Tegu $G = (V, E)$ – n-os eilės grafas, neturintis ilgio 4 ciklo C_4. Kiek daugiausia briaunų $m = |E|$ jis gali turėti?

Pavyzdžiui, kai $n = 5$ ir $m = 6$ vienintelis grafas be C_4 yra sudarytas iš dviejų trikampių su bendra viršūne, kai $n = 5$ ir $m \geq 7$ grafas visada turės tokį ciklą.

1 teorema (I. Reiman, 1958). *Jei $G = (V, E)$ – n-os eilės grafas, neturintis ilgio 4 ciklo C_4, tai*

$$m \leq \left[\frac{n}{4}\left(1 + \sqrt{4n-3}\right)\right].$$

Įrodymas. Taikysime dvigubo skaičiavimo principą, kai $A = V$ ir $B = V \times V$, o

$$S = \{(u, (v, w)) :\ u \,\text{gretima ir}\, v,\ \text{ir}\, w\}.$$

Dabar r_u – skaičius porų viršūnių v ir w, kurios yra gretimos u. Jei $\delta(u)$ - viršūnės laipsnis, tai

$$r_u = \binom{\delta(u)}{2}, \qquad |S| = \sum_{u \in V} \binom{\delta(u)}{2}.$$

Jei $q_{(v,w)}$ – skaičius viršūnių $u \in V$, gretimų abiem viršūnėms v ir w, tai $q_{(v,w)} \leq 1$, nes priešingu atveju grafas turėtų ciklą C_4. Iš formulės (2.1) išplaukia

$$|S| = \sum_{u \in V} \binom{\delta(u)}{2} = \sum_{(v,w) \in V \times V} q_{(v,w)} \leq \sum_{(v,w) \in V \times V} 1 \leq \binom{n}{2}.$$

Taigi,

$$\sum_{u \in V} \frac{\delta(u)\big(\delta(u)-1\big)}{2} \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Pritaikę ką tik minėtą Eulerio lemą, gauname

$$\sum_{u \in V} \delta^2(u) - 2m \leq n(n-1).$$

Kadangi pagal Cauchy nelygybę

$$2m = \sum_{u \in V} \delta(u) \leq \left(n \sum_{u \in V} \delta^2(u)\right)^2,$$

iš čia gauname

$$4m^2 \leq n^2(n-1) + 2mn.$$

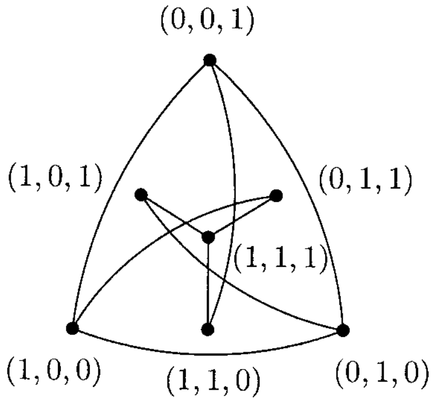
Išsprendę šią nelygybę baigiame 1 teoremos įrodymą. ◇

Ar yra tokių grafų, neturinčių C_4, kurių didumas yra artimas dydžiui, $\left[\frac{n}{4}\left(1+\sqrt{4n-3}\right)\right]$ ir kaip juos konstruoti?

Čia labai praverčia baigtinė geometrija. Tegu F_q – baigtinis kūnas, turintis $q \geq 2$ elementų, o $F_q^3 = \{u = (u_1, u_2, u_3) : \ u_1, u_2, u_3 \in F_q\}$ – vektorinė erdvė virš F_q. Kiekvienas nenulinis vektorius $u \in F_q^3$ generuoja vienamatį poerdvį $< u >:= \{cu : c \in F_q\}$. Du skirtingus poerdvius generuoja tik du tarpusavyje tiesiškai nepriklausomi (neproporcingi) vektoriai. Apibrėžkime grafą $G_q = (V, E)$, kurio viršūnės yra skirtingi poerdviai $< u >$, $u \in F_q^3 \setminus \{0\}$, o briauna jungia dvi viršūnes $< u >$, $u = (u_1, u_2, u_3)$, ir $< v >$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, tada ir tik tada, jei

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0. \tag{2.1}$$

Pavyzdys. Grafas G_2 atrodys taip:



Keliose lemose išvardinsime grafo G_p savybes.

1 lema. *Grafas G_p neturi ciklo C_4.*

Įrodymas. Pažiūrėkime, kiek bendrų gretimų viršūnių gali turėti viršūnių pora $< u >$ ir $< v >$. Kaip buvom pastebėję, vektoriai būtinai yra tiesiškai nepriklausomi. Jei $< x >\in V$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, – gretima abiems viršūnėms, tai x turi būti sistemos

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \tag{2.2}$$

$$v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 = 0$$

sprendinys. Bet ši sistema turi tik vieną tiesiškai nepriklausomą sprendinį. Tad, dvi viršūnės G_p grafe turi tik vieną bendrą gretimą viršūnę, todėl šis grafas neturi ilgio 4 ciklo C_4. $\diamond$

2 lema. *Grafo G_p eilė lygi $n = p^2 + p + 1$.*

Įrodymas. Turime $|F_q^3| = p^3$ vektorių. Viename vienamačiame poerdvyje yra p vektorių, iš jų – $(p-1)$-ą nenulinių. Visi nenuliniai erdvės vektoriai išsidėsto

$$(p^3 - 1)/(p - 1) = p^2 + p + 1$$

poerdviuose. Tai yra visų vienamačių F_q^3 poerdvių skaičius. Tokia ir grafo eilė. $\diamond$

Ateityje teks pasinaudoti viena algebrine lema, kurios įrodymą praleisime.

3 lema. *Kūne F_q lygtis*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{2.3}$$

turi p^2 sprendinių, sudarančių $(p+1)$-ą vienamatį poerdvį.

Vietoj įrodymo apsiribosime trumpu komentaru. Pastebėkime, kad jei vektorius $u = (u_1, u_2, u_3) \neq 0$ tenkina (2.3) lygtį, tai ir visi jam proporcingi vektoriai yra jos sprendiniai. Todėl sprendinių skirstymas į poerdvius yra natūralus.

4 lema. *Grafo G_p didumas lygus $m = \frac{p}{2}(p+1)^2$.*

Įrodymas. Pagal Eulerio lemą reikia rasti grafo viršūnių laipsnių sumą. Pagal (2.1) viršūnė $[x]$ yra gretima $< u >$, jei vektorius $x = (x_1, x_2, x_3)$ tenkina (2.2) lygtį. Jos sprendiniai sudaro dvimatį poerdvį, kuriame iš viso yra p^2 vektorių. Kaip ir ką tik pateiktame komentare, šie vektoriai pasiskirsto po vienamačius poerdvius. Tokių yra $(p^2-1)/(p-1) = p+1$. Grafe G_p vienamačiai poerdviai, nelygūs $< u >$, atitinka gretimoms viršūnėms. Lygties (2.2) sprendinys, sutampantis su $< u >$, tenkina ir (2.3) lygtį, t.y. jam galioja sąlyga

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0. \tag{2.4}$$

Vadinasi,

$$\delta(< u >) = \begin{cases} p+1, & \text{jei (2.4) nepatenkinta,} \\ p, & \text{jei (2.4) patenkinta.} \end{cases}$$

Iš 3 lemos išplaukia, kad antrasis atvejis galioja dėl $(p+1)$-os viršūnės $< u >$, o likusių $p^2+p+1-(p+1) = p^2$ viršūnių laipsnis yra $(p+1)$. Taigi,

$$2m = \sum_{<u>\in V} \delta(< u >) = p(p+1) + (p+1)p^2.$$

4 lema įrodyta. $\diamond$

Mus labiausiai dominantį teiginį pateiksime kaip teoremą.

2 teorema. *Grafo G_p eilė n ir didumas m tenkina sąryšį*

$$m = \frac{n-1}{4}\big(1 + \sqrt{4n-3}\big).$$

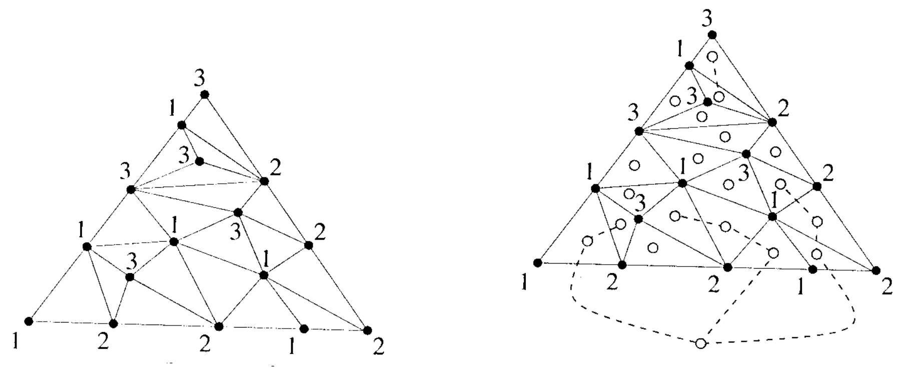
Įrodymas. Išplaukia iš formulių, įrodytų 2 ir 4 lemose. $\diamond$

Kaip matome, grafas G_p yra beveik ekstremalus, pagal 1 lemą jis neturi ciklo C_4, bet jo didumas artimas 1 teoremoje gautam įverčiui.

Diskrečiosios matematikos rezultatai gali būti panaudoti ir tolydžioje matematikoje. Tuo tikslu įsirodysime vieną grafų spalvinimo lemą. Pradžioje prisiminkime dualaus grafo apibrėžimą plokščiajam grafui. Plokščio grafo $G = (V, E)$ srityse, apribotose briaunomis (jo veiduose, valstybėse), ir išorinėje srityje atidėkime po vieną viršūnę. Jos sudarys dualaus grafo viršūnių aibę. Kiekvienai jų porai, paimtai iš veidų, kurie pradiniame grafe turėjo bendrą briauną $e \in E$, dualiajame grafe išvedame briauną, kertančią e. Taip gauname dualiojo grafo briaunų aibę. Nubraižykime pavyzdį.

Sperner'io lema. *Tarkime, kad turime trikampį* $\Delta = (V_1, V_2, V_3)$, *kurio viršūnės nuspalvintos spalvomis 1, 2 ir 3-čia atitinkamai. Šio trikampio plotą bet kaip dalykime mažesniais trikampėliais ir bet kaip spalvinkime jų viršūnes, bet išlaikykime vieną reikalavimą: trikampėlių viršūnės, patekusios išorinėn briaunon* V_iV_j, *yra spalvinamos tik* i *ir* j *spalvomis,* $1 \leq i < j \leq 3$. *Tada skaičius trikampėlių, kurių viršūnės yra nuspalvintos trimis spalvomis, yra nelyginis.*

Įrodymas. Naudosimės tokiais paveikslais:



Trikampį, padalintą trikampėliais, vadinkime trianguliuotuoju grafu. Nagrinėkime jo dualaus grafo pografį G', jame vietoj visų briaunų imdami tik tas briaunas, kurios buvo vedamos kertant trikampėlio briaunas su skirtingų 1-os ir 2-os spalvų viršūnėmis. Kokie yra G' viršūnių laipsniai? Mus ypač domins nelyginio laipsnio viršūnės, nes ateityje naudosimės Eulerio lemos paprasta išvada: bet kokiame grafe nelyginio laipsnio viršūnių skaičius yra lyginis.

Iš trikampio Δ išorėje esančios viršūnės grafo G' briaunos galėjo būti vedamos tik kertant briauną V_1V_2. Joje esančių trikampėlių viršūnių spalvų sekoje, sudarytoje iš 1-o ir 2-to, yra nelyginis skaičius pasikeitimų nuo vieno skaičiaus prie kito. Todėl G' grafe išorinės viršūnės laipsnis yra nelyginis.

Trikampėlių viduje esančių viršūnių laipsniai galėjo būti tik 1, 2 arba 0. Pirmasis atvejis atitiks trispalviam trikampėliui, antrasis – trikampėliams, kurių viršūnėms nuspalvinti yra naudojamos abi 1-a ir 2-a spalvos. Paskutinis atvejis bus trikampėliui, tarp kurio viršūnių spalvų nebus 1 arba 2. Taigi, nelyginio laipsnio viršūnių yra tiek, kiek yra trispalvių trikampėlių, plius viena išorinė viršūnė. Spernerio lemos teiginys išplaukia iš ką tik suformuluotos Eulerio lemos išvados. $\diamond$

Pereikime prie tolydžiosios matematikos. Pateiksime originalų fiksuoto taško teoremos įrodymą, paprastumo dėlei apsiribodami dvimatės erdvės atveju. Remsimės gerai žinomu faktu, kad skritulys yra homeomorfinis trikampiui. Tai reiškia, kad egzistuoja tolydus bijektyvus atvaizdis iš skritulio į trikampį ir atvirkščiai. Aišku, čia trikampis suprantamas kaip plokštumos dalis.

3 teorema (L. Brouwer, 1912). *Tegu $B^2 \subset \mathbf{R}^2$, – uždaras skritulys, o $f : B^2 \to B^2$ – tolydi funkcija. Tada egzistuoja $x \in B^2$ toks, kad $f(x) = x$.*

Įrodymas. Pagal ką tik padarytą pastabą galime apsiriboti trikampio, gulinčio trimatės erdvės plokštumoje

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \tag{2.5}$$

atvaizdžiais. Tegu trikampio Δ viršūnės yra erdvės $\mathbf{R}^3$ taškai $\xi_1 = (1, 0, 0)$, $\xi_2 = (0, 1, 0)$ ir $\xi_3 = (0, 0, 1)$, o $f : \Delta \to \Delta$ tolydus atvaizdis.

Nagrinėkime Spernerio lemoje aprašytas šio trikampio trianguliacijas $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2, \ldots$ taip, kad maksimalus trikampėlio kraštinės ilgis $\rho(\mathcal{T}_n)$ n-oje trianguliacijoje artėtų prie nulio, kai $n \to \infty$. Tą galime gauti konstruktyviai jungdami anksčiau apibrėžtų trikampėlių kraštinių vidurio taškus.

Tarkime, kad visiems $x \in \Delta$ turime $f(x) \neq x$. Tegu $v = (v_1, v_2, v_3)$ žymės trianguliacijose gautų trikampių viršūnes, o $\lambda(v) \in \{1, 2, 3\}$ – jų spalvos funkciją, kurią apibrėžkime tokiu būdu:

$$\lambda(v) = \min\{i \leq 3 : \ f(v)_i < v_i\}. \tag{2.6}$$

Iš mūsų prielaidos išplaukia, kad $f(v)_i \neq v_i$ bent vienam $i \leq 3$. O jei bent vienas iš skirtumų $f(v)_i - v_i$ yra teigiamas, tai pagal (2.5) kitas – neigiamas. Vadinasi, spalvos funkcija yra korektiškai apibrėžta.

Patikriname, Spernerio lemos sąlygą tokiam spalvinimui. Pastebėkime, kad ξ_i viršūnė turi i spalvą, nes jos i-ta koordinatė lygi vienam. Be to, bet kokio trikampio viršūnė v, esanti Δ briaunoje prieš viršūnę ξ_i, turi $v_i = 0$, todėl $f(v)_i - v_i \geq 0$ ir v spalva nebus i.

Pagal Spernerio lemą kiekvienoje trianguliacijoje $\mathcal{T}_n$ egzistuoja trispalvis trikampis Δ_n su viršūnėmis ξ_1^n, ξ_2^n ir ξ_3^n, kurių spalvos $\lambda(\xi_i^n) = i$. Tokiu būdu iš (2.6) gauname

$$(f(\xi_i^n))_i < (\xi_i^n)_i, \quad 1 = 1, 2, 3. \tag{2.7}$$

Čia $(y)_i := y_i$ – vektoriaus y i-oji koordinatė. Iš trijų aprėžtų intervalo [0,1] skaičių sekų $\{(\xi_i^n)_i\}$, $n = 1, 2, \ldots$, renkame konverguojančius, sakykim, į x_i, $i = 1, 2, 3$, posekius. Pakartotinai rinkdami, galime pasiekti, kad konvergavimą turime bendrai sekos numerių eilei $n = n' \to \infty$. Tada trikampiai Δ_n traukiasi į tašką $x = (x_1, x_2, x_3)$. Todėl pasinaudoję funkcijos f tolydumu, iš (2.7) gauname

$$f(x)_1 \leq x_1, \qquad f(x)_2 \leq x_2, \qquad f(x)_3 \leq x_3.$$

Vektorius $x = (x_1, x_2, x_3)$ ir jo vaizdas $f(x)$ tenkina (2.5) lygybę, tad jie turi sutapti. Prieštara įrodo teoremos teiginį. $\diamond$

3. Poravimas. Hall'o teorema

Poravimo problemos turi ir gyvenimiškų variantų. Tarkime, kad baigtinė aibė vaikinų, pažįstančių po keletą merginų, nusprendė vesti. Keli vaikinai gali pažinoti tą pačią merginą. Kokios sąlygos turi būti patenkintos, kad kiekvienas iš jų galėtų vesti jau pažįstamą merginą? Panaši problema gali susidaryti, kai keletas darbininkų, turinčių po kelias, gal būt, bendras specialybes, pretenduoja į keletą darbo vietų. Kaip juos įdarbinti, kad kiekvienas dirbtų pagal savo specialybę? Pradžioje pateiksime kombinatorinį vedybų problemos sprendimą, kurį 1935 metais pasiūlė P.Hall'as, vėliau tai susiesime su grafais.

Hallo teorema. *Visi m vaikinų, pažįstančių po keletą merginų, galės vesti savo pažįstamą tada ir tik tada, kada bet kuris k poaibis vaikinų, $1 \leq k \leq m$, kartu paėmus pažįsta ne mažiau kaip k merginų.*

Įrodymas. Būtinumas yra beveik akivaizdus. Jei kažkoks k rinkinys vaikinų nepažįsta, bendrai paėmus, k merginų, tai jų negalėtume apvesdinti su pažįstamomis.

Pakankamumą galime įrodyti matematinės indukcijos metodu. Kai $m = 1$, problemos sprendimas akivaizdus. Tarkime vedybų problema išsprendžiama bet kokiai aibei vaikinų, kurių skaičius mažesnis negu m. Pradžioje išnagrinėkime atvejį, kai bet koks būrys k vaikinų, $k < m$, bendrai paėmus pažįsta $k+1$ merginą. Išnaudodami šį pažinčių rezervą, apvesdiname bet kurį iš vaikinų su jo pažįstama, o likusiai aibei iš $m-1$ vaikino pritaikome indukcijos prielaidą.

Tarkime dabar, kad $k < m$ yra toks, kad k vaikinų būrys kartu pažįsta lygiai k merginų. Pagal indukcijos prielaidą šie vaikinai gali būti apvesdinti su savo pažįstamomis iš šių k merginų. Nagrinėkime likusius $m-k$ viengungių. Bet kuris jų h poaibis, $h \leq m-k$, kartu paėmus turi pažinoti h iš likusių merginų. Priešingu atveju, kartu su jau apsivedusiais jie būtų nepažinoję $k+h$ merginų. Vadinasi, ir likusiai aibei $m-k$ vaikinų patenkinta teoremos sąlyga. Kadangi antrajai vaikinų aibei irgi tinka indukcinė prielaida, teorema įrodyta. $\diamond$

Pavaizduokime Hall'o teoremos situaciją dvidaliu grafu. Tarkime, kad $G = (V_1 \cup V_2, E)$ - dvidalis grafas, t.y., E briaunos jungia tik V_1 viršūnes su V_2 viršūnėmis. Tarkime, kad $|V_1| \leq |V_2|$. Sakome, kad G grafe yra galimas *visiškasis poravimas*, jei aibėje V_2 egzistuoja poaibis V_2', toks, kad $|V_1| = |V_2'|$, ir V_1 viršūnės yra sujungtos nepriklausomomis E briaunomis su V_2' viršūnėmis. Kyla klausimas, kada egzistuoja visiškasis poravimas.

2 teorema. *Tegu $G = (V_1 \cup V_2, E)$ - dvidalis grafas, $\phi(A) \subset V_2$ - aibė viršūnių, sujungtų E briaunomis su $A \subset V_1$ viršūnėmis. Visiškasis poravimas egzistuoja tada ir tik tada, kada kiekvienam poaibiui $A \subset V_1$ teisinga nelygybė $|A| \leq |\phi(A)|$.*

Įrodymas. Interpretuokime V_1 Hall'o teoremos vaikinų aibe, o V_2 - merginų aibe. Akivaizdu, kad 2 teorema išplaukia iš anksčiau įrodytos teoremos. $\diamond$

4. Skirtingi poaibių atstovai

Matematikai svarbi ir kita Hall'o teoremos interpretacija. Spręskime tokį uždavinį. Tarkime $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ - aibės X netuščių poaibių šeima. Kada egzistuoja rinkinys $(x_1, \ldots, x_m)$ skirtingų X elementų tokių, kad $x_i \in A_i$, $1 \leq i \leq m$? Tokį x-ų poaibį iš X vadinsime poaibių A_i *skirtingų atstovų rinkiniu.* Sutinkamas ir $\mathcal{A}$ *transversalės* terminas.

1 teorema. *X aibės poaibių šeimos $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$ skirtingų atstovų rinkinys egzistuoja tada ir tik tada, kada*

$$\left| \cup_{i \in F} A_i \right| \geq |F| \tag{1}$$

su kiekvienu poaibiu $F \subset \{1, \ldots, m\}$.

1 įrodymas. Sudarykime dvidalį grafą $G(V_1, V_2)$ su $V_1 = \mathcal{A}$, o $V_2 = X$. Be to, išveskime briaunas $A_i x_j$, jei $x_j \in A_i$. Ką reikštų visiškasis poravimas šiam dvidaliui grafui? Tai būtų X poaibio, turinčio m elementų bei sujungtų briaunomis su $\mathcal{A}$, radimas. Akivaizdu, kad toks poaibis ir būtų $\mathcal{A}$ skirtingų atstovų rinkinys. Vadinasi, 2 teorema yra 1 teoremos išvada. $\diamond$

R.Rado įrodymas. įrodysime tik pakankamumą. Įrodymo idėja: jei (1) sąlyga yra patenkinta su aibe A_i, $|A_i| \geq 2$, tai ji išlieka patenkinta ir atėmus iš jos kažkurį elementą. Šią savybę įrodysime vėliau. Dabar iš jos išvedame teoremos teiginį.

Pasinaudoję, jeigu reikia, minėta savybe keletą kartų ir išmėtę iš A_i joje minimus elementus, vietoje visų aibių A_i galime gauti vieno elemento poaibius. Bet tada (1) sąlyga reiškia, kad visi likę A_i elementai yra skirtingi X elementai. Todėl jie sudaro ieškomą skirtingų atstovų rinkinį. Tuo būdu, teorema būtų įrodyta.

Grįžtame prie minėtos savybės. Tarkime, kad $i = 1$, $|A_1| \geq 2$, $x, y \in A_1$, ir bet kurio iš jų atėmimas iš A_1 pakeistų (1) sąlygą. Tai reiškia, jog turime du indeksų poaibius $F_1, F_2 \subset \{2, ..., m\}$ tokius, kad

$$|P| := \left| \cup_{i \in F_1} A_i \cup (A_1 \setminus \{x\}) \right| \leq |F_1| \tag{2}$$

ir

$$|Q| := \left| \cup_{i \in F_2} A_i \cup (A_1 \setminus \{y\}) \right| \leq |F_2|. \tag{3}$$

Tada

$$P \cup Q = \cup_{i \in F_1 \cup F_2} A_i \ \cup A_1 \subset X$$

ir ji patenkina (1) sąlygą, tad

$$|P \cup Q| \geq |F_1 \cup F_2| + 1. \tag{4}$$

Be to,

$$|P \cap Q| \geq \left| \cup_{i \in F_1 \cap F_2} A_i \right| \geq |F_1 \cap F_2|, \tag{5}$$

nes ir paskutinė sąjunga tenkina (1) sąlygą. Dabar iš (2), (3), (4) ir (5) nesunkiai išvedame prieštarą:

$$\begin{gathered} |F_1| + |F_2| \geq |P| + |Q| = |P \cup Q| + |P \cap Q| \geq \\ \geq |F_1 \cup F_2| + 1 + |F_1 \cap F_2| = |F_1| + |F_2| + 1. \end{gathered}$$

1 teorema įrodyta. $\diamond$

2 teorema. *$X = \{1, \ldots, b\}$ aibės poaibių šeima $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$, kuri kažkokiam $1 \leq r \leq n$ tenkina sąlygas*

(i) $|A_j| = r$;

(ii) kiekvienas $x \in X$ priklauso lygiai r poaibių iš $\mathcal{A}$.

Tada egzistuoja skirtingų atstovų rinkinys.

Įrodymas. Tikriname Hall'o sąlygą (1). Dukart skaičiuokime porų (j, x) su $j \in F$ ir $x \in A_j$ skaičių. Iš vienos pusės pagal (i) sąlygą

$$\sum_{j \in F, x \in A_j} 1 = \sum_{j \in F} \sum_{x \in A_j} 1 = r|F|.$$

Iš kitos pusės pagal (ii) sąlygą turime

$$\sum_{j \in F, x \in A_j} 1 = \sum_{x \in \cup_{j \in F} A_j} \sum_{j, x \in A_j} 1 \leq r \Big| \bigcup_{j \in F} A_j \Big|.$$

Vadinasi, (1) galioja ir teiginys yra teisingas. $\diamond$

Prisiminsime vieną viduramžių žaidimą – lotyniškųjų kvadratų sudarymą. *n eilės lotyniškuoju kvadratu* vadinama skaičių $1, 2, ..., n$ matrica, kurios eilutėse ir stulpeliuose yra skirtingi elementai. Ar su kiekvienu n tokia matrica egzistuoja?

3 teorema. *Tegu $n \geq 1$ – natūralusis skaičius. Egzistuoja n eilės lotyniškasis kvadratas.*

Įrodymas. Įrodysime net daugiau: kiekvieną stačiakampę matricą, vadinamą *lotyniškuoju stačiakampiu*, $m \times n$, $1 \leq m < n$, su skirtingais elementais (iš skaičių $1, ..., n$) eilutėse ir stulpeliuose galime papildyti iki lotyniškojo stačiakampio su didesniu eilučių skaičiumi. Kadangi bet kuris skaičių $1, ..., n$ kėlinys sudaro vienos eilutės lotyniškąjį stačiakampį, kartodami papildymo procedūrą, sudarytume lotyniškąjį kvadratą.

Tarkime, turime $m \times n$ lotyniškąjį stačiakampį, $m < n$. Kartu paėmus, šiame stačiakampyje kiekvienas elementas pakartotas m kartų, po vieną kiekvienoje eilutėje. Pažymėkime $A_1, ..., A_n$ skaičių, nepatekusių į matricos stulpelius, aibes. Pastebėkime, kad $|A_j| = n - m$, o kiekvienas skaičius iš $X = \{1, ..., n\}$ jose pasikartoja $n - m$ kartų. Pastarąjį teiginį nesunku įžvelgti nagrinėjant matricos stulpelius, papildytus aibėmis A_j. Taip susidarytų n kėlinių, kuriuose bet kuris iš skaičių, neviršijančių n, pasikartotų n kartų. Kadangi lotyniškajame stačiakampyje šis skaičius pakartotas m kartų, todėl visose aibėse A_j jis pasikartoja $n - m$ kartų. Vadinasi, yra patenkintos 2 teoremos salygos su $r = n - m$. Egzistuoja skirtingų atstovų rinkinys poaibių šeimai $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$, kuris gali sudaryti naują lotyniškojo stačiakampio eilutę. Pakartoję tai keletą kartų baigiame 2 teoremos įrodymą. $\diamond$

Kai kada pasiseka išrinkti tik $t \leq m$ skirtingų atstovų rinkinį (dalinę transversalę). Jo egzistavimo sąlyga šiek tiek silpnesnė.

4 teorema. *Tegu $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_m\}$ – netuščių aibės X elementų poaibių šeima. Skirtingų atstovų rinkinys iš t elementų, priklausančių kažkurioms iš A_i aibių po vieną, egzistuoja tada ir tik tada, kai kiekvienam $F \subset \{1, ..., m\}$*

$$\Big| \cup_{i \in F} A_i \Big| \geq |F| + t - m. \tag{6}$$

Įrodymas. Kai $|F| + t - m \leq 0$, sąlyga triviali. Tegu $t < m$, imkime bet kokią aibę D, $|D| = m - t$ ir nesikertančią sy X. Sudarykime aibės $X \cup D = X'$ poaibių šeimą $\mathcal{A}' = \{A_1 \cup D, ..., A_m \cup D\}$. Įsitikinkime, jog $\mathcal{A}$ dalinis t skirtingų atstovų rinkinys egzistuoja tada ir tik tada, kada $\mathcal{A}'$ turi skirtingų X' atstovų rinkinį.

Iš tiesų, radę dalinį rinkinį $x_1, ..., x_t$ galėtume prirašyti visus D elementus ir tuo būdu gauti $\mathcal{A}'$ skirtingų X' atstovų rinkinį, jau turintį m elementų. Atvirkščiai, turėdami pastarąjį rinkinį, ir išmetę iš jo visus D atstovus, kurių bus ne daugiau negu $m - t$, gautume bent t skirtingų aibių iš $\mathcal{A}$ atstovų, t. y., dalinį rinkinį.

Lieka įsitikinti, kad (6) sąlyga yra ekvivalenti Hall'o teoremos sąlygai, pritaikytai šeimai $\mathcal{A}'$. Tai išplaukia iš sąryšio

$$\Big| \cup_{i \in F} (A_i \cup D) \Big| = \Big| \cup_{i \in F} A_i \Big| + m - t \geq |F|.$$

4 teorema įrodyta. ◇

Jei dvidaliame grafe $G = G(V_1 \cup V_2, E)$ egzistuoja bent t briaunų, jungiančių skirtingas V_1 viršūnes su skirtingomis V_2 viršūnėmis, tai sakome, kad grafe yra *dalinis $t < |V_1|$ suporavimas*. Tegu, $|V_1| = m$ bei kaip ir anksčiau $\Phi(x_i) \subset V_2$ – viršūnių, sujungtų briaunomis su x_i, aibė.

Išvada. *Dvidaliame $G(V_1 \cup V_2, E)$ grafe yra dalinis $t < |V_1|$ suporavimas tada ir tik tada, kada*

$$\Big| \cup_{i \in F} \Phi(x_i) \Big| \geq |F| + t - m, \qquad F \subset \{1, ..., m\}.$$

Užduotis. Prie kokių sąlygų egzistuoja dalinis skirtingų atstovų iš $\mathcal{A}$ rinkinys išrinktų iš $X_0 \subset X$?

5. Nulių ir vienetų matricos

Hall'o teoremos sąlygos tikrinimą palengvina matricų, kurių elementai yra tik nuliai arba vienetai, nagrinėjimas. Tokios matricos vadinamos *(0,1) matricomis*. Tarkime, kad $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_m\}$ – netuščių aibės $X = \{x_1, ..., x_n\}$ elementų poaibių šeima. Matricą $M = (m_{ij})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, su $m_{ij} \in \{0, 1\}$ ir $m_{ij} = 1$ tada ir tik tada, kada $x_j \in A_i$ vadiname *šeimos $\mathcal{A}$ incidenčiąja matrica*. Dvidaliame $G(V_1 \cup V_2, E)$ grafe, $V_1 = \{x_1, ...x_m\}$, $V_2 = \{y_1, ..., y_n\}$, imdami kaip ir anksčiau aibę V_2 viršūnių, kurios buvo sujungtos su $x_i \in V_1$, gautume, jog $m_{ij} = 1$ tada ir tik tada, kai $x_i y_j \in E$.

(0,1) matricos *elementų rangu* (nelygu *matricos rangui*!) vadiname didžiausią skaičių vienetų, kurie yra skirtingose eilutėse ir skirtinguose stulpeliuose. Aišku, eilučių ar stulpelių keitimas vietomis netur.es įtakos šio rango skaičiavimui.

1 teorema. *Aibės X poaibių šeima $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_m\}$ turi didžiausią t skirtingų atstovų rinkinį tada ir tik tada, kai jos incidenčios matricos elementų rangas lygus t.*

Įrodymas išplaukia iš apibrėžimų. ◇

Kita teorema, skirta palengvinti (0,1) matricos elementų rangui skaičiuoti.

2 teorema (König, Egerváry, 1931). *(0,1) matricos elementų rangas lygus mažiausiam bendram skaičiui eilučių ir stulpelių, kuriuose bendrai yra visi matricos vienetiniai elementai.*

Įrodymas. Tarkime, kad visi vienetiniai elementai bendrai yra r eilučių ir s stulpelių, $\mu = r + s$ yra minimalus. Aišku, jog elementų rangas neviršija μ. Galime tarti, jog matrica neturi nulinių eilučių ir stulpelių.

Įrodysime, kad matricoje yra μ vienetų, išsidėsčiusių skirtingose eilutėse ir skirtinguose stulpeliuose. Patogumo sumetimais, perstatykime eilutes ir stulpelius taip, kad visi vienetai būtų viršutinėse r eilučių ir paskutiniuose s stulpelių. Gauname tokią matricą:

$$M = \begin{pmatrix} P & S \\ 0 & Q \end{pmatrix}.$$

Čia kairiajame apatiniame kampe yra dalinė nulinė matrica, kurios matavimai yra $(m - r) \times (n - s)$. Atkreipkime dėmesį į dalines matricas P ir Q. Nei viena matricos P eilutė negali būti nulinė. Priešingu atveju visus M vienetus būtume sutalpinę į mažiau negu r eilučių ir s stulpelių. Panašiai samprotaudami gautume, kad Q stulpeliai yra nenuliniai.

Tegu A_i, $i \leq r$, – pirmųjų $n - s$ stulpelių indeksų j, kai $m_{ij} = 1$, poaibis. Ši poaibių šeima $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_r\}$ tenkina Hall'o teoremos sąlygą. Iš tiesų, jei koks nors k šių poaibių rinkinys turės mažiau negu k elementų, tai vienetai, esantys šiose eilut.ese tilps $l < k$ stulpelių. Pradin.eje matricoje M tas k eilučių pakeiskime l stulpeliu, kuriuos prijunkime prie stulpelio $\binom{S}{Q}$. Bendras eilučių ir stulpelių, talpinančių visus vienetus būtų

$$(r - k) + s + l = \mu - (k - l) < \mu.$$

Prieštara įrodo, kad Hall'o sąlyga yra patenkinta.

Pagal Hall'o teoremą galime išrinkti skirtingų atstovų rinkinį iš r elementų. Jis nurodys skirtingus indeksus stulpelių, kuriuose yra M matricos r vienetų, kurie be to bus ir skirtingose eilutėse. Panašiai pasielgę su matrica Q, gausime dar s vienetų skirtingose M eilutėse ir stulpeliuose. Todėl M elementų rangas yra lygus $r + s = \mu$.

2 teorema įrodyta. ◇

6. Besikertančių poaibių šeimos

Tarkime, kad X yra n aibė, t. y. $|X| = n \geq 1$. Ji turi iš viso 2^n poaibių. Jie sudaro visų poaibių aibę, dažnai žymimą 2^X. Trumpumo dėlei mes žymėsime $\mathcal{P}(X)$. Dėl kalbinio sklandumo vietoje "poaibių aibė" sakysime "poaibių šeima", nors žodis "šeima" galėtų leisti jos elementų pasikartojimus. Dabar visais atvejais poaibiai bus skirtingi.

Nagrinėkime jos poaibių šeimas $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\} \subset \mathcal{P}(X)$ su savybe

$$A_i \cap A_j \neq \emptyset, \quad 1 \leq i < j \leq m.$$

Jas vadinsime poromis *besikertančių poaibių šeimomis.*

1 teorema. *Jei $\mathcal{A}$ – n aibės besikertančių poaibių šeima, tai*

$$|\mathcal{A}| \le 2^{n-1}.$$

Be to, egzistuoja tokia $\mathcal{A}$, kad $|\mathcal{A}| = 2^{n-1}$.

Įrodymas. Turime 2^{n-1} skirtingų nesutvarkytųjų poaibių porų $(A, X \setminus A)$, kai A perbėga visus poaibius iš $\mathcal{P}(X)$. Bet kokioje šeimoje $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ iš bet kurios šios poros gali būti ne daugiau kaip vienas poaibis. Kitaip sakant, atitiktis

$$A_i \mapsto (A, X \setminus A),$$

jei $A_i = A$ arba $A_i = X \setminus A$, apibrėžia $\mathcal{A}$ injektyvų atvaizdį su reikšmėmis šių porų aibėje. Tad, $m \le 2^{n-1}$.

Visi poaibiai, turintys 1, sudaro aibės $\{1, \dots, n\}$ besikertančių poaibių šeimą. Jų yra 2^{n-1}. ◇

Užduotis. *Raskite $\mathcal{A}$, sudarytos iš visų n aibės poaibių, turinčių daugiau nei $n/2$ elementų, galią. Ir pastebėkite, kad tokia $\mathcal{A}$ sudaro besikertančių poaibių šeimą.*

Kaip įvertinama besikertančių poaibių šeimos galia, kai įvedami papildomi apribojimai poaibiams? Imkime tik k poaibius su $k \le n/2$.

2 teorema (P. Erdős, Ch. Ko, R. Rado, 1938) *Jei $n \ge 2k$, tai didžiausia besikertančių n aibės k poaibių šeima turi ne daugiau kaip*

$$\binom{n-1}{k-1}$$

narių.

Įrodymas. Pasinaudokime netikėtu įvaizdžiu. Imkime aibės $X = \{1, \dots, n\}$ skaičių ciklinį kėlinį (t.y. sutapatiname kėlinius pavidalo $(1234) = (2341) = (3412) = (4123)$), pažymėkime jį τ ir juo sunumeruokime vienetinio apskritimo vienodo ilgio $2\pi/n$ lankelius, apeidami juos pagal laikrodžio rodyklę. Pastebėkime, kad poromis besikertančių lankų, sudarytų iš k iš eilės einančių lankelių, šeima $\{L_1, \dots, L_l\}$ negali turėti daugiau negu k lankų, t.y. $l \le k$.

Iš viso turime $(n-1)!$ ciklinių kėlinių τ ir galimybių sunumeruoti apskritimo lankus. Tegu $\mathcal{A} = \{A_1, \dots A_l\}$. Fiksavus poaibio $A \in \mathcal{A}$ elementų numeraciją, jį galima vaizduoti k iš eilės einančių lankelių lanku L_τ kažkokioje lankelių numeracijoje, gautoje ciklinio kėlinio τ pagalba. Tą žymėkime $A \mapsto L_\tau$. Panagrinėkime porų aibę

$$S = \{(A, \tau) : \ A \in \mathcal{A}, \ \tau - \text{cikl. k} \ A \mapsto L_\tau\}$$

ir skaičiuokime dukart. Iš vienos pusės,

$$|S| = \sum_\tau \sum_{A \in \mathcal{A}} \mathbf{1}\{A \mapsto L_\tau\} \le \sum_\tau k = k(n-1)!.$$

Antra vertus,

$$|S| = \sum_{A\in\mathcal{A}} \sum_{\tau} \mathbf{1}\{A \mapsto L_\tau\} = \sum_{A\in\mathcal{A}} k!(n-k)! = |\mathcal{A}|k!(n-k)!.$$

Čia, skaičiuodami vidinę sumą pastebėjome, kad aibės A elementus galime pernumeruoti $k!$ kartų. Vadinasi, jos vaizdavimas lanku tiek kartų pasikartojo kitose lankų numeracijose naudojant kitus τ. Dar daugiau kėlinio skaičiai, nepatenkantys į A, gali būti keičiami $(n-k)!$ kartų ir visi pakeistieji kėliniai duos šios aibės vaizdą. Vadinasi, yra $k!(n-k)!$ ciklinių τ, užtikrinančių sąryšį $A \mapsto L_\tau$.

Sulyginę abi $|S|$ išraiškas, gauname

$$|\mathcal{A}| \le \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Teorema įrodyta. $\diamond$

Teorema 1 teigia, kad besikertančių poaibių šeimos galia bent du kartus mažesnė už visų poaibių aibės galią. Joje buvo naudojamas sąryšis $x \in A$. Panagrinėkime teiginį, išreiškiamą operacija $A \setminus \{x\}$.

3 teorema (J.A. Bondy, 1972). *Tegu $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ – n aibės poaibių šeima, tai egzistuoja $x \in X$ toks, kad poaibiai $A_i \setminus \{x\}$, $1 \le i \le n$, yra skirtingi. Egzistuoja $(n+1)$-o poaibio šeima, neturinti tokios savybės.*

Įrodymas. Pastebėkime, kad teoremoje leidžiamas ir vienas tuščiasis poaibis tarp A_i, suprantant $\emptyset \setminus \{x\} = \emptyset$.

Panaudokime poaibių simetrinį skirtumą Δ. Pagal apibrėžimą

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \qquad A, B \in \mathcal{P}(X).$$

Tarkime, kad dėl $\mathcal{A}$ negalioja teoremos teiginys.

Bet kokiam $D \subset X$ galime apibrėžti nebūtinai skirtingų poaibių rinkinį

$$\mathcal{A}_D = \{A_i \cap D : \ A_i \in \mathcal{A}\}.$$

Jei $x \in A_1 \Delta A_2$, pvz., $x \in A_1$ (tada $x \notin A_2$), o $D = \{x\}$, tai $|\mathcal{A}_D| \ge 2$, nes turi tuščiąjį poaibį ir $\{x\}$. Vadinasi, poaibių šeima

$$\mathcal{D} := \{D \subset X : \ |\mathcal{A}_D| \ge |D| + 1\}$$

yra netuščia ir joje egzistuoja maksimalios galios poaibis D. Kokia jo galia? Kadangi $|\mathcal{A}_D| \le |\mathcal{A}| = n$, tai $|D| \le n-1$. Lygybė $|D| = n-1$ reikštų, jog $\mathcal{A}_D$ sudaro skirtingos aibės, o $D = X \setminus \{d\}$ su kažkokiu $d \in X$. Kadangi

$$A_i \cap (X \setminus \{d\}) = A_i \setminus \{d\}, \quad 1 \le i \le n,$$

pagal mūsų padarytą prielaidą tokie poaibiai negali būti skirtingi. Taigi,

$$|D| \leq n - 2. \tag{6.1}$$

Panašiai pastebėkime, kad

$$|\mathcal{A}_D| \leq n - 1. \tag{6.2}$$

Iš tiesų, jei

$$A_i \cap D = A_i \setminus \bar{D}, \qquad \bar{D} = X \setminus D,$$

būtų skirtingos, tai ir $A_i \setminus \{x\}$ būtų skirtingos kiekvienam $x \in \bar{D}$. Pagal (6.1) jų yra bent 2. Tai prieštarautų mūsų prielaidai dėl $\mathcal{A}$.

Iš (6.2) išplaukia, kad egzistuoja maksimalios galios D su savybe $A_i \cap D = A_j \cap D$ kažkokiem $1 \leq i < j \leq n$. Jei $x \in A_i \Delta A_j$, tai $x \notin D$ (Įsitikinkite!). Imkime $E = D \cup \{x\}$. Pastebėję, jog $A_i \cap E \neq A_j \cap E$ bei $A_s \cap E \neq A_t \cap E$ visoms poroms $1 \leq s < t \leq n$, kurioms buvo $A_s \cap D \neq A_t \cap D$, turime

$$|\mathcal{A}_E| \geq |\mathcal{A}_D| + 1 \geq |D| + 2 = |E| + 1.$$

Tokiu būdu, apibrėžėme didesnios galios nei maksimali aibę iš $\mathcal{D}$. Prieštara įrodo pirmą teoremos teiginį.

Antrajam tvirtinimui pagrįsti, pakanka imti šeimą

$$\emptyset, \{1\}, \ldots, \{n\}.$$

Teorema įrodyta. $\diamond$

Antras 3 teoremos įrodymas remiasi grafų teorija. Tegu vėl $\mathcal{A}$ neturi teoremoje nurodytos savybės. Paprastumo dėlei imkime $X = \{1, \ldots, n\}$. Taigi, kiekvienam $1 \leq i \leq n$ egzistuoja $1 \leq k(i) < l(i) \leq n$ su savybe $A_{k(i)} \neq A_{l(i)}$, bet $A_{k(i)} \setminus \{i\} = A_{l(i)} \setminus \{i\}$, ir todėl

$$A_{k(i)} \Delta A_{l(i)} = \{i\}. \tag{6.3}$$

Sudarykime multigrafą su viršūnių aibe $V = \{1, \ldots, n\}$ ir kiekvienam i išveskime briauną sujungdami $k(i)$ su $l(i)$. Multigrafo didumas irgi yra n. Įsitikinkime, kad jame nėra ciklo, todėl jis bus grafas.

Tegu jame yra ciklas, turintis briaunas

$$k(i_1)l(i_1),\ k(i_2)l(i_2), \ldots, k(i_{s-1})j(i_{s-1}),\ k(i_s)l(i_s)$$

su sutampančiomis viršūnėmis $l(i_j) = k(i_{j+1})$, kai $1 \leq j \leq s-1$ ir $l(i_s) = k(i_1)$. Supaprastinkime žymenis pakeisdami $i_r \mapsto r$, $A_{k(j)} = A'_j$ bei $A_{l(j)} = A'_{j+1}$. Dabar pagal (6.3) turėsime

$$A'_1 \Delta A'_2 = \{1\}, A'_2 \Delta A'_3 = \{2\}, \ldots, A'_s \Delta A'_{s+1} = A'_s \Delta A'_1 = \{s\}.$$

Pasinaudokime gerai žinomu faktu, kad $\mathcal{P}(X)$ sudaro Abelio grupę simetrinio skirtumo atžvilgiu. Joje neutralusis elementas yra $\emptyset$, o kiekvienai $A \in \mathcal{P}(X)$ simetriškuoju (priešinguoju) elementu yra jis pats. Todėl įterpdami tuščias aibes ir pasinaudodami asociatyvumu, gauname

$$\begin{aligned}\{s\} &= A_1'\Delta A_s' = (A_1'\Delta A_2')\Delta(A_2'\Delta\cdots\Delta A_{s-1}')\Delta(A_{s-1}'\Delta A_s')\\ &= \{1\}\Delta\{2\}\Delta\cdots\Delta\{s-1\} = \bigcup_{j=1}^{s-1}\{j\}.\end{aligned}$$

Akivaizdi prieštara įrodo, kad grafas yra beciklis, bet tada jo didumas nėra didesnis už $n-1$. Vadinasi, prielaida apie $\mathcal{A}$ buvo klaidinga. $\diamond$

Kitame skyrelyje nagrinėkime atvejį, kai aibės kertasi tam tikru elementų skaičiumi.

7. De Bruijn-Erdős'o teorema (2004 m. nereikia).

Aibių, kurių poros kertasi fiksuotu skaičiumi elementų, tyrimas yra nelengvas uždavinys. Pateiksime vieną pavyzdį.

1 teorema (De Bruijn-Erdős). *Tegu $\mathcal{A}$ – n aibės $X = \{1, \ldots, n\}$ poaibių, kurie poromis kertasi vienu elementu, šeima. Tada $|\mathcal{A}| \le n$. Lygybė $|\mathcal{A}| = n$ galima tik atvejais:*

(i) *gal būt pernumeravus elementus, $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ su $A_i = \{i, n\}$, kai $1 \le i \le n-1$, ir $A_n = \{n\}$;*

(ii) *gal būt pernumeravus elementus, $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ su $A_i = \{i, n\}$, kai $1 \le i \le n-1$, ir $A_n = \{1, \ldots, n-1\}$;*

(iii) *tam tikram natūriniam skaičiui q yra teisinga lygybė*

$$n = q^2 + q + 1,$$

be to, kiekvienos iš $\mathcal{A}$ aibės galia lygi $q+1$ ir kiekvienas X elementas yra $(q+1)$-oje aibėje.

Įrodymas. Pradėkime pastebėjimu, kad (ii) ir (iii) šiek tiek persikerta. Iš tiesų, kai $n = 3$, o $q = 1$, turime "trikampį": $\mathcal{A} = \big\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\big\}$.

Apžvelkime trivialius atvejus. Jei egzistuoja vienas X aibės elementas (tegu jis būna n), priklausantis visoms aibėms iš $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\}$, tai

$$X \setminus \{n\} = \bigcup_{i=1}^{m}\big(A_i \setminus \{n\}\big)$$

būtų aibės $X \setminus \{x\}$ skaidinys nesikertančiomis aibėmis. Dešinėje pusėje esančių aibių rinkinyje, galima tik viena tuščia aibė, nes priešingu atveju du poaibiai iš $\mathcal{A}$ būtų buvę vienodi. Vadinasi,

$$n - 1 \ge (m-1)\cdot 1$$

ir tuo pačiu pirmasis teoremos teiginys yra teisingas. Jei turėtume ir $m = n$, tai sunumeravus elementus taip, kad $A_i \setminus \{n\} = \{i\}$, $1 \le i \le n-1$, gautume (i) atvejį.

Jei būtų $X \in \mathcal{A}$ ir $|\mathcal{A}| \ge 2$, tai $|\mathcal{A}| = 2$ ir antroji šeimos $\mathcal{A}$ aibė turėtų tik vieną elementą, todėl teoremos tvirtinimai būtų akivaizdūs.

Ateityje nebeliesime ką tik išnagrinėtų atvejų ir tarsime, kad $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ su $|\mathcal{A}| = m \ge 2$, todėl ir $n \ge 3$. Pažymėkime

$$B_j = \bar{A}_j = X \setminus A_j, \qquad k_j = |A_j|.$$

Tegu r_i – skaičius aibių iš $\mathcal{A}$, kuriose yra i, $1 \le i \le n$. Pastebėkime, kad

$$r_i \le k_j,$$

jei $i \notin A_j$. Iš tiesų, kiekviena aibė, turinti i, kertasi su aibe A_j vis kitame taške.

Taikykime skaičiavimo dukart principą. Tegu

$$S = \big\{(i, A_j) : \ i \in A_j, 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\big\}.$$

Turime

$$N := |S| = \sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{j=1}^{m} k_j. \tag{7.1}$$

Dabar skaičiuokime trejetus, t.y. galią aibės

$$U := \big\{(i, A_j, A_k) : \ i \in A_j \cap A_k, 1 \le i \le n, 1 \le j, k \le m, j \ne k\big\}.$$

Kadangi sankirtai priklauso tik vienas i, tai gauname

$$\begin{aligned} |U| &= \sum_{j \ne k} \sum_{i \in A_j \cap A_k} 1 = \sum_{j \ne k} 1 = m(m-1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j \ne k \\ i \in A_j \cap A_k}} 1 = \sum_{i=1}^{n} r_i(r_i - 1). \end{aligned} \tag{7.2}$$

Skaičiuokime galią aibės

$$V := \big\{((i, i'), A_j) : \ \{i, i'\} \subset A_j, 1 \le i, i' \le n, i \ne i', 1 \le j \le m\big\},$$

patogumo sumetimais laikydami, kad (i, i') yra sutvarkytoji pora. Gauname

$$\begin{aligned} |V| &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{(i,i') \\ \{i,i'\} \subset A_j}} 1 = \sum_{j=1}^{m} k_j(k_j - 1) \\ &= \sum_{\substack{(i,i') \\ i \ne i'}} \sum_{\substack{j \le m \\ \{i,i'\} \subset A_j}} 1 \le \sum_{\substack{(i,i') \\ i \ne i'}} 1 = n(n-1). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Grįžtame prie pirmojo teoremos teiginio. Kai $m < n$, jis įrodytas. Todėl toliau sakykime, jog $m \geq n$. Turime skirtingus X aibės poaibius $A_1, \ldots, A_n$. Be to, pagal įrodymo pradžioje išskirtą trivialų atvejį galime tarti, kad jie nesutampa su X. Aibių šeima

$$\mathcal{B} := \{B_1, \ldots, B_n\}$$

tenkina Hallo sąlygą. Iš tiesų, imkime bet kokį indeksų poaibį $J \subset \{1, \ldots, n\}$ ir skaičiuokime

$$\Big|\bigcup_{j\in J} B_j\Big| = \Big|\overline{\bigcap_{j\in J} A_j}\Big|.$$

Tai elementų, nepatenkančių į jokią iš A_j, $j \in J$, skaičius. Jei $J = \{j\}$, tai $|B_j| = |X \setminus A_j| \geq 1 \geq |\{j\}| = 1$ ir Hallo sąlyga yra patenkinta.

Tegu $2 \leq |J| \leq n-1$. Egzistuoja pora $j, k \in J$ tokia, kad

$$\Big|\bigcup_{j\in J} B_j\Big| \geq \big|B_j \cup B_k\big| = \big|\overline{A_j \cap A_k}\big| = n - 1.$$

Hallo sąlyga taip pat yra patenkinta. Atvejis $|J| = n$ trivialus, nes aibių B_i sąjunga apima visus X elementus. Vadinasi, šeima $\mathcal{B}$ turi skirtingų atstovų rinkinį, kurį sunumeruokime raidėmis i, t.y. $i \in B_i$. Tada $i \notin A_i$, $1 = 1, \ldots, n$. Todėl pagal ankstenį pastebėjimą gauname

$$r_i \leq k_i,$$

o iš (7.1), (7.2) bei (7.3) išplaukia

$$\begin{aligned} m(m-1) &= \sum_{i=1}^n r_i^2 - \sum_{i=1}^n r_i = \sum_{i=1}^n r_i^2 - N \\ &\leq \sum_{j=1}^m k_j^2 - N \leq n(n-1) \end{aligned} \tag{7.4}$$

Iš čia gauname, kad $m \leq n$, o prisiminę ankstesnę prielaidą, – ir lygybę $m = n$. Tada iš (7.4) išplaukia ir lygybė $r_i = k_i$, $1 \leq i \leq n$. Palyginę (7.2) ir (7.3) dabar matome, kad

$$\begin{aligned} n(n-1) &= \sum_{i=1}^n r_i(r_i - 1) = \sum_{j=1}^m k_j(k_j - 1) \\ &= \sum_{\substack{(i,i') \\ i\neq i'}} \sum_{\substack{j\leq m \\ \{i,i'\}\subset A_j}} 1 \leq \sum_{\substack{(i,i') \\ i\neq i'}} 1 = n(n-1). \end{aligned}$$

Vadinasi, kartotinės sumos vidinė suma visada turi būti lygi vienam. Tai reiškia, kad bet kokia pora nelygių skaičių i ir i' turi priklausyti vienam ir tik vienam poaibiui A_j. Dabar galime įsivaizduoti poaibių struktūrą. Imkime $i \notin A_j = \{s_1, \ldots, s_{k_j}\}$. Poros $\{i, s_r\}$ bus skirtinguose poaibiuose, kurių bendruoju elementu bus i. Šie poaibiai išsemia visus r_i poaibių, kuriuose yra i. Vadinasi, iš $i \notin A_j$ išplaukia netgi $r_i = k_j$, čia $1 \le i, j \le n$.

Tarkime, kad yra tokių $i \neq j$, kuriems $r_i \neq r_j$. Jei būtų bent viena aibė A_s, $1 \le s \le n$ tokia, kad $i \notin A_s$ ir $j \notin A_s$, turėtų būti ir $r_i = k_s = r_j$. Taigi, šiuo atveju visose aibėse yra i arba j.

Bet kokiam $l \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$ taip pat turime

$$r_l \neq r_i \qquad \text{arba} \qquad r_l \neq r_j.$$

Kadangi galimas pernumeravimas, nesiaurindami bendrumo, tariame, kad galioja pirmoji iš pastarųjų nelygybių. Kaip ką tik pastebėjome, kiekvienoje aibėje turi būti arba i, arba l. Čia $1 \le l \le n$ – bet koks, nelygus i ir j, skaičius. Pagal teoremos įrodymo pradžioje išskirtą trivialų atvejį, bent viena aibė neturi i, bet tada ji turi turėti ir j, ir l su bet kokiu $l \neq i, j$. Tokia aibė yra tik viena. Peržymėjus i į n, matome, kad tai bus aibė $\{1, \ldots, n-1\}$. Likusios šeimos $\mathcal{A}$ aibės turi turėti n ir dar vieną skirtingą joms elementą. Taigi, gavome (ii) teoremos punkte aprašytą struktūrą.

Liko atvejis, kai r_i yra tas pats visiems i. Pažymėkime $q = r_i - 1$. Taigi, kiekvienas elementas iš X patenka į $(q+1)$-ą aibę. Bet kokia aibė A_j iš šeimos $\mathcal{A}$, neturi kažkokio elemento, todėl $|A_j| = k_j = r_i = q + 1$. Šeimos aibės poromis persikerta tik vienu elementu. Tad, įsivaizdavę vieną iš aibių $(q+1)$-o taško seka, paimtume šalia esantį tašką ir nuo jo pratestume taškų sekas, besibaigiančias pradinės sekos taškais. Dabar akivaizdu, kad

$$n = 1 + (q+1)q = q^2 + q + 1.$$

Teorema įrodyta. $\diamond$

8. ,,Politiko" teorema

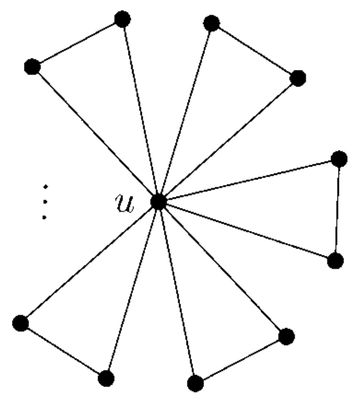
Paskutiniame skyrelyje išnagrinėjome, struktūrą poaibių, kurių porų sankirtose yra lygiai vienas elementas. Savo stiliumi De Bruijn-Erdős'o teoremai yra artima kombinatorikos folkloru tapusi ,,Politiko" teorema. Populiariausia jos forma yra tokia:

Tarkime, kad žmonių bendruomenė turi savybę: bet kokios jos narių poros abu asmenys pažįsta lygiai vieną kitą asmenį. Tada bendruomenė turi vieną ,,politiką", t. y. narį, kurį pažįsta visi.

Palyginę su 7 skyrelio teorema matome, kad dabar vietoje sąryšio ,,elementas priklauso" formulavime naudojamas išsireiškimas ,,abu poros asmenys pažįsta kitą". Grafų teorijoje tai lengva išreikšti gretimumo sąryšiu.

Teorema. *Tarkime, kad grafe $G = (V, E)$ kiekvienos viršūnių poros abu elementai yra gretimi su viena ir tik viena viršūne. Tada egzistuoja viršūnė, gretima su visomis kitomis grafo viršūnėms.*

Grafas, vadinamas ,,vėjo malūnu":



iliustruoja tokią galimybę. Pasirodo, kad tai – vienintelis grafas, tenkinatis teoremos sąlygą.

Įrodymas. Pirmoje dalyje įrodysime, kad G – grafas, tenkinantis teoremos sąlygą, bet neturintis teoremoje nurodytos viršūnės, kuri būtų gretima su visomis kitomis viršūnėmis, yra *reguliarus.* Pagal apibrėžimą tokio grafo viršūnių laipsniai $\delta(u)$, $u \in V$, yra vienodi. Aišku, kad G nebus nei pilnasis grafas K_1, nei K_3.

Pradžioje pastebėkime, kad G neturi ilgio 4 ciklo C_4. Iš tiesų, priešingu atveju negretimų ciklo viršūnių pora turėtų dvi bendras gretimas viršūnes, o ne vieną. Taigi, G nebus pilnasis grafas K_s, $s \geq 4$. Vadinasi, egzistuoja negretimų viršūnių porą $u, v \in V$. Tegu $\delta(u) = k \geq 1$, o $W := \{w_1, \ldots, w_k\}$ – jos kaimyninių viršūnių aibė. Pastebėkime, kad teoremos sąlyga tenkinama tik, kai $k \geq 2$.

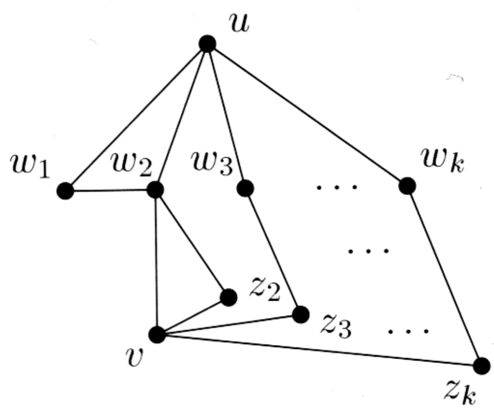
Poros $\{u, v\}$ bendra gretimoji viršūnė bus aibėje W. Tarkime, kad tai viršūnė w_2. Poros $\{u, w_2\}$ bendra gretimoji viršūnė irgi bus aibėje W. Tegu tai yra w_1. Panašiai porų $\{w_2, v\}, \ldots, \{w_k, v\}$ bendras gretimąsias viršūnes sužymėkime raidėmis $z_2, \ldots, z_k$ atitinkamai. Kadangi $C_4 \notin G$, viršūnės z_i nepriklauso W, be to z_i, $2 \leq i \leq k$ yra skirtingos. Vadinasi,

$$\delta(v) \geq k = \delta(u).$$

Mūsų samprotavimuose galėtume sukeisti u ir v vietomis. Todėl

$$\delta(u) = \delta(v) = k \geq 2. \tag{8.1}$$

Gautą situaciją pavaizduokime grafu



Matome, kad atveju $k = 2$ turėtume ,,vėjo malūną", tenkinantį teoremos išvadą. Taigi toliau nagrinėsime atvejį, kai $k \geq 3$. Visos nepaminėtos viršūnės, jei tokių yra, bus negretimos ir u, ir v, o viršūnės w_i ir z_j – negretimos arba u, arba v. Vadinasi, pagal (8.1) visų viršūnių laipsniai yra k. Įrodę G reguliarumą, pastebėkime, kad k ir $n = |V|$ yra tarpusavyje susiję dydžiai. Iš vienos pusės,

$$\sum_{i=1}^{k} \delta(w_i) = k^2. \tag{8.2}$$

Iš kitos pusės, įsitikinkime, kad suma kairioje pusėje ,,suskaičiuoja" visas grafo viršūnes, o u – net k kartų. Iš tiesų, jei kažkokia viršūnė x nebūtų gretima vienai iš w_i, tai panagrinėję poros $\{x, u\}$ bendrą gretimą gautume prieštarą. Vadinasi, dėmuo $\delta(w_i)$ suskaičiuoja w_i kaimynes, skirtingiems i šios kaimynių aibės kertasi tik viršūne u. Iš (8.2) išplaukia

$$k^2 - k + 1 = n. \tag{8.3}$$

Antra įrodymo dalis yra algebrinė. Pagrindinė idėja – ištirti grafo G gretimumo matricos tikrines reikšmes. Tegu $A = (a_{ij})$ - tokia matrica. Ji yra simetrinė, kiekvienoje jos eilutėje yra $k \geq 3$ vienetų, o kiti elementai yra nuliniai. Pagrindinė įstrižainė taip pat sudaryta iš nulių. Teoremos sąlyga reikalauja, kad bet kokioje poroje eilučių būtų lygiai viena vieta, kai vienetas yra virš vieneto. Todėl galime nesunkiai rasti

$$A^2 = \begin{pmatrix} k & 1 & \dots & 1 \\ 1 & k & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & k \end{pmatrix} = (k-1)I + J.$$

Čia I – n eilės vienetinė, o J – matrica, sudaryta tik iš vienetų. Kadangi charakteristinis polinomas

$$\det(J-tI)=\det\begin{pmatrix}1-t & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1-t & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \dots & 1-t\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-t & 0 & \dots & 1\\ 0 & -t & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ t & t & \dots & 1-t\end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix}-t & 0 & \dots & 1\\ 0 & -t & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & n-t\end{pmatrix}=(n-t)(-t)^{n-1},$$

tai matricos A^2 tikrinės reikšmės yra

$$(k-1)+n, \qquad (k-1)+n-1$$

kartotinumų 1 ir $(n-1)$-as atitinkamai. Pritaikę (8.3) lygybę iš čia gauname, kad matricos A tikrinė reikšmė k yra pirmojo kartotinumo, o reikšmės $\sqrt{k-1}$ ir $-\sqrt{k-1}$ turi kažkokius kartotinumus s ir r, $s+r=n-1$. Prisiminę dar vieną tiesinės algebros faktą, kad matricos įstrižainės elementų suma lygi jos tikrinių reikšmių sumai, matome, jog

$$k+s\sqrt{k-1}-r\sqrt{k-1}=0.$$

Vadinasi, $s\neq r$ bei

$$\sqrt{k-1}=\frac{k}{s-r}.$$

Dešinėje pusėje turime racionalųjį skaičių, o kairioji yra kvadratinė šaknis iš natūraliojo skaičiaus. Iš čia išplaukia, kad ši šaknis irgi yra natūralusis skaičius (Įsirodykite!). Paymėkime jį h. Gauname sąryšį

$$h(s-r)=k=h^2+1,$$

parodantį, kad h dalija h^2+1. Todėl $h=1$, o $k=2$. Bet šį atvejį mes buvome išmetę iš nagrinėjimo. Gautoji prieštara parodo, kad grafo G, neturinčio teoremoje nurodytos savybės nėra.

Teorema įrodyta. $\diamond$

Performuluodami teoremą, matome, kad grafas, kuriame tarp bet kokių dviejų viršūnių yra tik vienintelis ilgio 2 kelias, yra ,,vėjo malūnas". Paskutiniame dešimtmetyje didelio dėmesio buvo susilaukusi A. Kotzigo hipotezė.

Kotzigo hipotezė. *Tegu $l>2$. Nėra grafų su savybe, kad bet kokią viršūnių porą jungia vienintelis ilgo l kelias.*

Pats autorius patvirtino ją, kai $l\leq 8$. Tik 2000 metais Y. Yang, J. Lin, C. Wang ir V. Li įrodė hipotezę.

9. Spernerio šeima

Apibrėžimas. *Šeima poaibių* $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$, $A_i \subset X$, *tenkinančių sąlygą*

$$A_i \not\subset A_j, \qquad A_j \not\subset A_i$$

kiekvienai porai $1 \le i < j \le m$, *vadinama Sperner'io vardu.*

Dažnai tokios šeimos vadinamos *antigrandinėmis*, o poaibių šeimos su savybe

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_s \quad -$$

grandinėmis.

Jei $X^{(r)}$ žymi visų r, $0 \le r \le n = |X|$, galios poaibių aibę, tai ji yra Spernerio šeima. Jos pačios galia yra $\binom{n}{r}$. Žinoma, kad binominis koeficientas pasiekia maksimumą, kai $r = [n/2]$. Pasirodo, kad didesnės galios m negu šis rėžis pasiekti yra neįmanoma. Pradžioje įsirodysime pagalbinį rezultatą.

Lema. *Tegu* $\mathcal{P}(X)$ *– visų* n *aibės poaibių aibė,* $X^{(r)}$ *– visų* r *poaibių šeima. Jei* $r < n/2$, *tai egzistuoja injekcija* $f : \mathcal{P}(X) :\to \mathcal{P}(X)$ *su savybėm* $A \subset f(A)$ *ir*

$$f\Big|_{X^{(r)}} =: \ f_r \colon X^{(r)} \to X^{(r+1)}.$$

Jei $n/2 < r \le n$, *tai egzistuoja injekcija* $g : \mathcal{P}(X) :\to \mathcal{P}(X)$ *su savybėm* $g(A) \subset A$ *ir*

$$g\Big|_{X^{(r)}} =: \ g_r \colon X^{(r)} \to X^{(r-1)}.$$

Įrodymas. Pastebėkime, kad antrasis teiginys išplaukia iš pirmo. Pakanka apibrėžti

$$g(A) = \overline{f(\overline{A})}.$$

Čia $\bar{A} = X \setminus A$.

Imkime dvidalį grafą su viršūnių aibėmis $V_1 = X^{(r)}$ ir $V_2 = X^{(r+1)}$. Viršūnę $A \in V_1$ sujunkime briauna, jei $A \subset B$ ir $B \in V_2$. Be to, susitarkime žymėti

$$B = \Phi(A) \qquad \Phi(\mathcal{A}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \Phi(A), \quad \mathcal{A} \subset V_1.$$

Šis grafas tenkina Hallo teoremos sąlygą. Iš tiesų, kiekviena $A \in \mathcal{A} \subset V_1$ yra gretima su $n - r > n/2$ viršūnių iš V_2, o $B \in \Phi(\mathcal{A}) \subset V_2$ sujungta su ne daugiau negu $r+1$ viršūne iš $\mathcal{A}$. Dukart suskaičiuokime $M := |\{AB : \ A \in \mathcal{A}, B \in \Phi(\mathcal{A})\}|$. Gauname

$$M = \sum_{A \in \mathcal{A}} \sum_{\substack{B \\ B = \Phi(A)}} 1 = \sum_{A \in \mathcal{A}} (n - r) = |\mathcal{A}|(n - r).$$

ir

$$M = \sum_{B\in\Phi(\mathcal{A})} \sum_{\substack{A \\ \Phi(A)=B}} 1 \le \sum_{B\in\Phi(\mathcal{A})} (r+1) = (r+1)|\Phi(\mathcal{A})|.$$

Todėl

$$(r+1)|\Phi(\mathcal{A})| \ge (n-r)|\mathcal{A}|.$$

Kadangi $r < n/2$, iš čia ir lyginio, ir nelyginio skaičiaus n atveju gauname $|\Phi(\mathcal{A})| \ge |\mathcal{A}|$. Pagal Hallo teoremą egzistuoja visiškas poravimas, kuris dabar apibrėžia norimą injektyvų atvaizdį. ◇

Lema leidžia aibę $\mathcal{P}(X)$ suskaidyti $m = \binom{n}{[n/2]}$ nepersikertančių grandinių sąjunga. Kol $r < n/2$, $A \in X^{(r)}$ ir $f(A)$ dėkime į tą pačią grandinę ir gausime

$$A \subset f(A) \subset f(f(A)) \subset \cdots \subset B.$$

Čia B – kažkokia aibė iš $X^{(m)}$. Panašiai, kai $r > [n/2]$ pasinaudoję atvaizdžiu g sudarytume besitraukiančias grandines, kurios baigtųsi kažkokia $B' \in X^{(m)}$. Liktų tik sujungti grandines su $B = B'$.

Užduotis. Grandinė $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_k$ vadinama *simetrine*, jeigu $|A_{i+1}| = |A_i|+1$, $1 \le i \le k-1$, ir $|A_1| = n-k$. Įrodykite, kad $\mathcal{P}(X)$ galima išskaidyti nesikertančių simetrinių grandinių sąjunga.

1 teorema (E. Sperner, 1928). *Aibės X, $|X| = n$ Spernerio šeimoje yra ne daugiau kaip*

$$m = \binom{n}{[n/2]}$$

poaibių.

Įrodymas. Pastebėkime, kad Spernerio šeimos poaibiai priklauso skirtingoms aukščiau sudarytoms grandinėms po vieną. Grandinių yra m. Teorema įrodyta. ◇

Septintame praeito amžiaus dešimtmetyje D. Lubell, L.D. Mešalkin, ir K. Yamamoto nepriklausomai vienas nuo kito patikslino Spernerio rezultatą.

2 teorema (LYM t.). *Tegu $\mathcal{A}$ – Spernerio šeima, $\mathcal{A}_k = \mathcal{A} \cap X^{(k)}$ ir $a_k = |\mathcal{A}_k|$. Tada*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \binom{n}{k}^{-1} \le 1.$$

Įrodymas. Grandines pavidalo

$$\emptyset \subset A_{i_1} \subset A_{i_2} \subset \cdots \subset A_{i_{n-1}} \subset X,$$

ir turinčias savybę $|A_{i_k}| = k$ kiekvienam $1 \le k \le n-1$, vadinkime *maksimaliosiomis*. Jų yra $n!$.

Kiekviena $A \in \mathcal{A}_k$ priklauso $k!(n-k)!$ maksimaliųjų grandinių. Spernerio sistemos aibės gali priklausyti ne daugiau kaip vienai grandinei. Todėl

$$\sum_{k=0}^{n} a_k k!(n-k)! \leq n!.$$

Tą ir reikėjo įrodyti. $\diamond$

Dažnai sutinkama kita LYM teoremos formuluotė.

2' teorema. *Aibės A, $|A| = a$ svoriu vadinkime $w(a) := \binom{n}{a}^{-1}$. Jei $\mathcal{A}$ – Spernerio šeima, tai*

$$\sum_{A \in \mathcal{A}} w(A) \leq 1. \tag{7.1}$$

Įrodymas. Tegu a_k – galios k, $0 \leq k \leq n$, aibių poaibių šeimoje $\mathcal{A}$ skaičius. Sugrupavę kairės pusės dėmenis, gauname sumą

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \binom{n}{k}^{-1},$$

kuri buvo įvertinta 2 teoremoje. $\diamond$

LYM teorema paaiškina, kad konstruodami dideles Spernerio šeimas, turime imti mažo svorio aibes. Todėl tokių aibių galios turi būti artimos binominių koeficientų $\binom{n}{k}$ maksimumui. Vadinasi, reiktų imti $k = [n/2]$. Įstatę šią reikšmę į (7.1), gautume Spernerio šeimos aibių skaičiaus įvertį, kuris buvo išvestas 1 teoremoje.

Pastebėkime, kad (7.1) nelygybė virsta lygybe, kai $\mathcal{A} = X^{(k)}$ kažkokiam k. Sunkiau būtų išvesti, kad kitais atvejais (7.1) yra griežta nelygybė.

10. Klikų problema

Vėl grįžkime prie grafų problemų. Priminsime, kad pilnasis pografis K_p grafe yra vadinamas *klika.* Intuityviai aišku, kad grafas, neturintis didelės eilės p klikos, negali turėti daug briaunų. Rasime šio fakto kiekybinį įvertinimą.

Turano teorema. *Jei grafas $G = (V, E)$ neturi p eilės klikos, tai*

$$|E| \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}.$$

Įrodymas. Pasinaudokime ir tikimybėmis, ir viena optimizavimo idėja. Grafo viršūnių aibėje V įveskime tikimybinį skirstinį, viršūnei $u \in V$ priskirdami tikimybę $w_u \geq 0$ taip, kad

$$\sum_{u \in V} w_u = 1.$$

Nagrinėkime sumą

$$f(\bar{w}) := \sum_{uv\in E} w_u w_v,$$

kurioje, kaip matome, imamos tik gretimų viršūnių tikimybės.

Tegu u_1 ir v_1 – bet kokios negretimos viršūnės. Pažymėkime jų kaimyninių viršūnių tikimybes

$$s = \sum_{u_1 v\in E} w_v, \qquad t = \sum_{uv_1\in E} w_u.$$

Tegu $s \geq t$. Kaip keistųsi $f(\bar{w})$, jei v_1 tikimybę perduotume u_1, tuo pačiu mažintume viršūnių su teigiamomis tikimybėmis skaičių? Kadangi

$$\begin{aligned}
(10.1) \qquad f(\bar{w}) &= \sum_{\substack{uv\in E\\ u\neq u_1, v\neq v_1}} w_u w_v + w_{u_1} \sum_{u_1 v\in E} w_v + w_{v_1} \sum_{uv_1\in E} w_u \\
&= \sum_{\substack{uv\in E\\ u\neq u_1, v\neq v_1}} w_u w_v + w_{u_1} s + w_{v_1} t,
\end{aligned}$$

tai naujoje sumoje išnyktų paskutinis, o priešpaskutinis dėmuo padidėtų dydžiu $w_{v_1} s$. Taigi, naujajam tikimybių skirstiniui

$$f(\bar{w}') = f(\bar{w}) + w_{v_1} s - w_{v_1} t \geq f(\bar{w}).$$

Vadinasi, galime padaryti išvadą: negretimų viršūnių tikimybes perduodant tai viršūnei, kurios kaimynių tikimybė yra didesnė, funkcijos f reikšmė nemažėja. Ji pasiekia maksimumą, kai viršūnės su teigiamomis tikimybėmis yra poromis gretimos. Tada jos sudaro kliką, kurios eilę pažymėkime $k \leq p - 1$.

Tegu dabar u_1 ir v_1 dvi šios klikos viršūnės su tikimybėmis $w_{u_1} > w_{v_1}$. Imkime $0 < \varepsilon < w_{u_1} - w_{v_1}$ ir pakeiskime šių viršūnių tikimybes per ε mažindami didesnę ir didindami mažesnę. Panašiai kaip (10.1), bet atsižvelgdami į tai, kad dabar ir $u_1 v_1 \in E$, gauname naująją funkcijos f reikšmę

$$\begin{aligned}
f(\bar{w}'') = &\sum_{\substack{uv\in E\\ u\neq u_1, v\neq v_1}} w_u w_v + \big(w_{u_1} - \varepsilon\big) \sum_{u_1 v\in E} w_v + \big(w_{v_1} + \varepsilon\big) \sum_{uv_1\in E} w_u \\
&+ \big(w_{u_1} - \varepsilon\big)\big(w_{v_1} + \varepsilon\big) = f(\bar{w}) - \varepsilon\big(1 - w_{u_1}\big) + \varepsilon\big(1 - w_{v_1}\big) - \varepsilon^2 \\
&= f(\bar{w}) + \varepsilon\big(w_{u_1} - w_{v_1}\big) - \varepsilon^2 > f(\bar{w}).
\end{aligned}$$

Šis įvertis rodo, kad klikoms funkcija f pasiekia maksimumą, kai skirstinys viršūnių aibėje yra tolygus. Jei $v_1, \ldots, v_k$ – klikos viršūnės, tai jų tikimybės tada turi būti lygios $1/k$. Klika turi $k(k-1)/2$ briaunų, todėl maksimali funkcijos f reikšmė lygi

$$\frac{k(k-1)}{2}\frac{1}{k}\frac{1}{k}.$$

Didėjant $k \leq p-1$, ji didėja, tad bet kokiam tikimybiniam skirstiniui virūnių aibėje turime

$$f(\bar{w}) \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p-1}\right).$$

Paėmę tolygųjį skirstinį $w_u \sim 1/n$, $u \in V$, gauname

$$\frac{|E|}{n^2} \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{p-1}\right).$$

Tą ir reikėjo įrodyti. ◇

Ar Turano teorema nurodo tikslų grafo didumo įvertinimą? Atsakymas yra teigiamas. Pakanka panagrinėti $(p-1)$-dalius pilnuosius grafus. Pagal apibrėžimą jie gaunami suskaidžius viršūnių aibę į $(p-1)$-ą galios $n_i > 0$ poaibį taip, kad $1 \leq i \leq p-1$ ir $n_1 + \cdots n_{p-1} = n$, ir sujungiant kiekvieną porą viršūnių, gulinčių skirtinguose poaibiuose, briaunomis. Maksimalus briaunų skaičius bus tada, kada poaibiuose esančių viršūnių skaičius yra labiausiai artimas. Jei vienodo negalima pasiekti, tai imama sąlyga $|n_i - n_j| \leq 1$. Pastarieji grafai vadinami Turano vardu. Jei $(p-1)$ dalija n, tai turime $n_i \sim n/(p-1)$. Tokio $(p-1)$-dalio pilnojo grafo didumas lygus

$$\binom{p-1}{2}\left(\frac{n}{p-1}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}.$$

Kadangi $(p-1)$-daliai grafai neturi p eilės klikos, tai matome, kad Turano gautas įvertis yra pasiekiamas. Bendru atveju nagrinėjamos klikų problemos atžvilgiu Turano grafai yra ekstremalieji.

11. Tikimybinis metodas

Kaip pastebėjome ankstesniuose skyreliuose, diskrečioje matematikoje naudojami visų matematikos šakų metodai ir rezultatai. Pastaruoju metu ypač plinta tikimybinis ,,virusas". Dažnai būna sunku įrodyti kažkokio išskirtinio objekto egzistavimą visoje jų klasėje. Tačiau toje klasėje įvedus tikimybinį matą, nesunku parodyti, kad išskirtinio objekto tikimybė yra teigiama. Iš čia daroma išvada, kad toks objektas egzistuoja. Žinoma, tai bus nekonstruktyvus įrodymas.

Pradėkime nuo paprastos spalvinimo problemos. Imkime pradinę aibę X ir tarkime, kad turime galimybę jos elementus nuspalvinti naudodami vieną iš dviejų spalvų. Nagrinėkime jos d poaibių šeimą $\mathcal{A}$. Sakoma, kad $\mathcal{A}$ yra *dvispalvė*, jei yra toks X nuspalvinimas, kad kiekviename $\mathcal{A}$ poaibyje atsiras abiejų spalvų elemetai. Jei $\mathcal{A}$ su $|\mathcal{A}| = m$ yra dvispalvė, tai ir daliniai pošeimiai su mažesniu skaičiumi poaibių bus dvispalviai. Didinant m ši savybė nebūtinai išlieka. Pavyzdžiui, aibės X su $|X| = 2d-1$ visų d poaibių šeima $X^{(d)}$ jau nebėra dvispalvė. Iš tiesų, bet kaip spalvinant bus bent d vienodos spalvos elementų ir toks poaibis priklauso $X^{(d)}$. Kokia yra mažiausia poaibių šeimos $\mathcal{A} \subset X^{(d)}$, kai $d \geq 2$, galia, kad $\mathcal{A}$ nebūtų dvispalvė. Pažymėkime šią galią $m(d)$. Kitaip tariant, jei $|\mathcal{A}| < m(d)$, tai šeima $\mathcal{A}$ jau bus dvispalvė. Pritaikę Stirlingo formulę, iš pateiktojo pavyzdžio matome, kad

$$m(d) \leq \binom{2d-1}{d} = (1 + o(1))\frac{2^{2d}}{2\sqrt{\pi d}}, \quad d \to \infty.$$

Tai yra gana grubokas įvertis iš viršaus. Daugiau informacijos suteikia apatiniai įverčiai. Ateityje tarsime, kad pradinė aibė X yra pakankamai didelė.

1 teorema. *Teisingas toks įvertis iš apačios*:

$$m(d) > 2^{d-1}, \quad d \geq 2.$$

Įrodymas. Reikia įsitikinti, kad bet kokia d poaibių šeima $\mathcal{A}$ su $|\mathcal{A}| \leq 2^{d-1}$ yra dvispalvė. Nuspalvinkime aibės X elementus viena iš spalvų su vienoda tikimybe ir nepriklausomai vieną nuo kito. Galime sakyti, kad prieš spalvindami viršūnę metame monetą. Jei $A \in \mathcal{A}$ – vienas iš poaibių, tai tikimybė, kad visi jo elementai yra vienos spalvos, yra

$$P(S_A) := P(A - \text{vienspalvis}) = (1/2)^{d-1}.$$

Čia atsižvelgėme į dviejų spalvų galimybes. Tikimybė, kad bent vienas iš $\mathcal{A}$ poaibių bus vienspalvis, lygi

$$P\Big(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} S_A\Big).$$

Jei poaibiai iš $\mathcal{A}$ nesikerta, ieškomas nuspalvinimas akivaizdžiai egzistuoja. Priešingu atveju užrašytoje įvykių sąjungoje įvykiai nėra nesutaikomi, o sankirtų tikimybės yra teigiamos. Tada

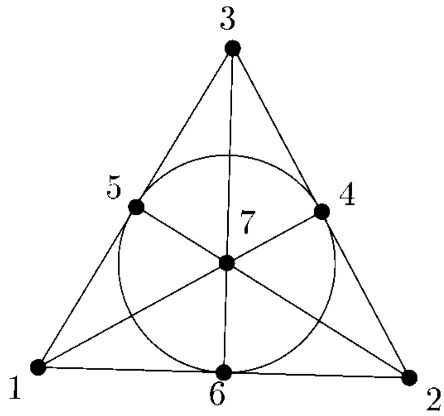
$$P\Big(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} S_A\Big) < \sum_{A \in \mathcal{A}} P(S_A) = m(1/2)^{d-1} \leq 1.$$

Iš čia išplaukia, kad tikimybė, jog visi poaibiai bus dvispalviai, yra teigiama, todėl egzistuoja X nuspalvinimas toks, kad $\mathcal{A}$ būtų dvispalvis. $\diamond$

Pastebėkime, kad $m(2) = 3$. Tai reiškia, kad 1 teoremoje gautas įvertis yra pasiekiamas. Pakanka panagrinėti trikampio viršūnių nuspalvinimo dviem spalvomis variantus. Visada viena arba dvi kraštinės turės skirtingų spalvų galų, o iš trijų kraštinių šeimos viena neturės šios savybės.

Sunkiau įrodyti teiginį, kad $m(3) = 7$.

Panagrinėkite lygiakraščio trikampio viršūnių ir pusiaukraštinių visus tarpusavio susikirtimo taškus, kaip pavaizduota šiame paveiksle:



Gausite 7 taškų aibę. Sudarykite šeimą 7 poaibių po tris iš taškų, esančių kraštinėse, pusiaukraštinėse ir kraštinių vidurio taškų. Šiai šeimai nuspalvinti nepakaks 2 spalvų, nors kad ir kaip keistume visų taškų nuspalvinimo variantus. Todėl $m(3) \leq 7$.

Dvidešimtajame amžiuje taip ir nepavyko rasti $m(4)$ bei kitų šios funkcijos reikšmių.

Ypač sunkios yra Ramsey'io skaičių problemos. Įsivaizduokime, kad juoda ir balta spalvom nuspalvinome pilnojo grafo K_n viršūnes ir keliame klausimą, ar jame yra vienaspalviai pilnieji pografiai K_s arba K_t. Čia $s, t \leq n$. Jei vieną iš šių pografių radome n eilės grafe, tai juo labiau rasime ir didesniame. Įdomus uždavinys yra surasti mažiausią n, kad K_n turėtų bent vieną minėtą vienaspalvį pografį. Šis mažiausias skaičius vadinamas *Ramsey skaičiumi* $R(s, t)$.

Su jais susijęs plačiai žinomas faktas, jog šešių studentų draugijoje visada egzistuoja trejetas, kurie pažįsta vienas kitą arba nei vienas nepažįsta kito. Vaizduokime studentus šeštos eilės grafo viršūnėmis ir junkime briauna viršūnes, jei atitinkami studentai pažinojo vienas kitą. Šalia nubrėžkime *grafo papildinį*, t.y., grafą su šešiomis viršūnėmis, kurios sujungtos briaunomis, jei atitinkami studentai nepažinojo vienas kito. Uždėjus abu grafus vieną ant kito, gautume pilnąjį K_6 grafą. Taigi, minėtas faktas teigia, kad bet kaip perskyrus pilnojo grafo briaunas į dvi dalis (pvz., nudažius jas dviem skirtingomis spalvomis), arba viename, arba kitame pografyje bus pilnasis K_3 pografis. Deja, penkių studentų draugija tokios savybės jau nebeturi.

Performuluojant Ramsey skaičiaus $R(s, t)$ apibrėžimą, juo galima laikyti mažiausią eilę G grafo, kuriame arba jo papildinyje yra vienas iš vienspalvių pografių K_s arba K_t.

Ateityje laikysime, kad $s, t \geq 2$. Pastebėkime, kad

$$R(s, t) = R(t, s), \quad s, t \geq 2,$$

o

$$R(s, 2) = R(2, s) = s, \quad s \geq 2.$$

Iš tiesų, dažant K_s grafo briaunas juodai ir baltai, arba visos briaunos bus juodos, arba bent viena balta.

2 teorema (Ramsey, 1928). *Kai $s, t > 2$, teisinga nelygybė*

$$R(s,t) \leq R(s-1,t) + R(s,t-1).$$

Be to, kai $s, t \geq 2$,

$$R(s,t) \leq \binom{r+s-2}{s-1}.$$

Įrodymas. Pirmąją nelygybę įrodinėjant, galime laikyti, kad dešinėje esantys dėmenys yra baigtiniai. Tegu

$$n := R(s-1,t) + R(s,t-1) =: n_1 + n_2.$$

Spalvinkime K_n grafo briaunas juodai ir baltai. Reikia rasti juodai nudažytą pografį K_s arba baltą pografį K_t.

Fiksuokime K^n viršūnę x. Jos laipsnis $\delta(x) = n - 1 = n_1 + n_2 - 1$. Todėl ši viršūnė yra incidenti nemažiau negu n_1 juodų briaunų arba nemažiau negu n_2 baltų briaunų. Simetriškumo dėka galime teigti, kad yra teisingas pirmasis atvejis. Nagrinėkime pilnąjį K_{n_1} grafą, kurio viršūnės yra incidentiškos x ir kurias su x jungia juodos briaunos. Jei K_{n_1} turi baltą K_t pografį, tai pirmoji nelygybė įrodyta.

Priešingu atveju, pagal pažymėjimą $n_1 = R(s-1,t)$, pilnasis K_{n_1} grafas turi juodą K_{s-1} pilnąjį pografį, kuris kartu su x ir juodosiomis briaunomis, incidenčiomis x, sudaro pilnąjį pografį K_s. Pirmoji teoremos nelygybė įrodyta.

Antrąją nelygybę įrodome matematinės indukcijos metodu. Kaip esame pastebėję, kai $s = 2$ arba $t = 2$, antroji nelygybė virsta lygybe. Tarkime, kad $s, t > 2$, o $s', t' \geq 2$ kita pora natūraliųjų skaičių, $s' + r' < s + t$, kuriai antroji teoremos nelygybė jau yra teisinga pagal indukcinę prielaidą. Iš anksčiau įrodytos nelygybės išplaukia

$$\begin{aligned} R(s,t) &\leq R(s-1,t) + R(s,t-1) \leq \\ &\leq \binom{t+s-3}{s-2} + \binom{t+s-3}{s-1} = \binom{t+s-2}{s-1}. \end{aligned}$$

Teorema įrodyta. ◇

Išvada. *Teisingas toks įvertis iš viršaus:*

$$R(s,s) \leq 2^{2s-3}.$$

Įrodymas. Kadangi binominių koeficientų

$$\binom{2s-3}{s-1}, \qquad \binom{2s-3}{s-2}$$

suma suskaičiuoja ne visus $(2s-3)$ aibės poaibius, tai

$$R(s,s) \leq \binom{2s-2}{s-1} = \binom{2s-3}{s-1} + \binom{2s-3}{s-2} \leq 2^{2s-3}. \tag{11.1}$$

Išvada įrodyta. $\diamond$

Jau anksčiau matėme, kad $R(2,2) = 2$. Įsitikinkite, kad minėta studentų būrelio savybė matematiškai yra išreiškiama lygybe $R(3,3) = 6$. Jai įrodyti pastebėtume, kad pirmoji iš (11.1) nelygybių parodo, jog $R(3,3) \le 6$. Apatinį įvertį gautume išnagrinėję pilnąjį K_5 grafą, pavaizdavę jį penkiakampiu ir nuspalvinę vidines briaunas baltai, o išorines – juodai. Kadangi jame nerastume vienspalvio trikampio, padarytume išvadą, kad $R(3,3) \ge 6$.

Ramsey'io skaičių įvertinimas iš apačios yra žymiai sudėtingesnė problema. Ją nagrinėsime naudodami tikimybinius samprotavimus.

3 teorema (P. Erdős). *Visiems $s \ge 2$ turime*

$$R(s,s) \ge 2^{s/2}.$$

Įrodymas. Galime pradėti nuo $s \ge 4$. Imkime K_n grafą, kai $n < 2^{s/2}$, ir nepriklausomai su vienodomis tikimybėmis $1/2$ nuspalvinkime jo briaunas juoda ir balta spalvomis. Bet kokio vis briaunų nuspalvinimo tikimybės yra lygios

$$2^{-\binom{n}{2}}.$$

Jei A – viršūnių s aibė, o S_A – įvykis, kad visos A viršūnes jungiančios briaunos yra baltos, tai

$$P(S_A) = 2^{-\binom{s}{2}}.$$

Vadinasi, tikimybė, kad yra bent vienas baltas pilnasis pografis K_s, lygi

$$P\Big(\bigcup_{|A|=s} S_A\Big) \le \sum_{|A|=s} P(S_A) = \binom{n}{s} 2^{-\binom{s}{2}}.$$

Pasinaudokime nelygybe

$$\binom{n}{s} \le \frac{n^s}{2^{s-1}}, \quad s \ge 4,$$

išplaukiančia iš

$$\binom{n}{s} = \frac{n(n-1)\cdots(n-s+1)}{s!} \le \frac{n^s}{s!} \le \frac{n^s}{2^{s-1}}.$$

Taigi, jei $n < 2^{s/2}$,

$$P\Big(\bigcup_{|A|=s} S_A\Big) \le \frac{n^s}{2^{s-1}} 2^{-\binom{s}{2}} < 2^{s^2/2-\binom{s}{2}-s+1} = 2^{-s/2+1} \le 1/2.$$

Tokia pati tikimybė ir dėl juodojo K_s pografio egzistavimo. Vadinasi, tikimybė, kad neegzistuos nei baltas, nei juodas K_s, yra griežtai teigiama. Darome išvadą, kad yra grafo K_n nuspalvinimas su šia savybe. Teorema įrodyta. $\diamond$

Aptartus Ramsey skaičiaus $R(s,s)$ įverčius pavyksta patikslinti tik atskirais atvejais. Nežiūrint to, kad mes naudojome primityvius tikimybinus samprotavimus, bet kokiam s P.Erdős'o įverčio iki šiol nepavyko pagerinti.

Pabaigai panagrinėkime grafų įdėties į plokštumą problemą. Prisiminkime, kad grafas vadinamas planariuoju, jei egzistuoja jam izomorfiškas plokščiasis grafas. Tai reiškia, kad planarųjį grafą galima pavaizduoti plokštumoje taip, kad briaunas vaizduojančios Žordano kreivės nesikirstų vidiniuose taškuose. Žinoma, gretimos briaunos bus vaizduojamos kreivėmis, turinčiomis bendrą galinį tašką. Paprastajam jungiam plokščiam grafui $G=(V,E)$ su $|V|=n$, $|E|=m$ ir veidų (valstybių) skaičiumi f galioja Eulerio lygybė

$$n-m+f=2.$$

Iš čia išplaukia nelygybė

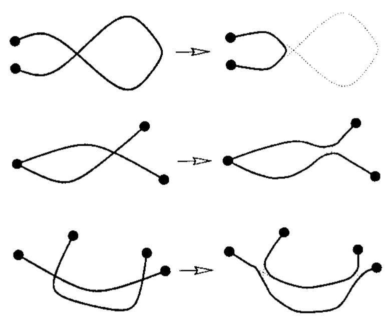
$$m\le 3n-6. \tag{11.2}$$

Iš tiesų, jei f_i – skaičius veidų, apribotų $i\ge 3$ briaunų, tai

$$f=f_3+f_4+\cdots, \qquad 2m=3f_3+4f_4+\cdots.$$

Vadinasi, $2m-3f\ge 0$. Įstatę šį įvertį į Eulerio lygybę, gauname (11.2).

Taigi, matome, jog vaizduodami didelius grafus plokštumoje, neišvengsime briaunų susikirtimų. Aišku, galėtume išvengti briaunos susikirtimo su savimi, briaunų su bendra viršūne susikirtimo, dviejų briaunų susikirtimo dukart ir daugiau kartų. Palyginkite brėžinius:

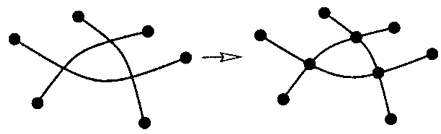


Kalbėdami apie briaunų susikirtimus čia išvardintų atvejų neturėsime omenyje. Koks gi yra minimalus briaunų susikirtimų skaičius paprastajam grafui? Pažymėkime jį $cr(G)$. Grafo įdėtį su tokiu susikirtimų skaičiumi vadinkime *minimaliuoju.*

3 teorema. *Teisingas įvertis iš apačios*

$$cr(G)\ge m-3n-6.$$

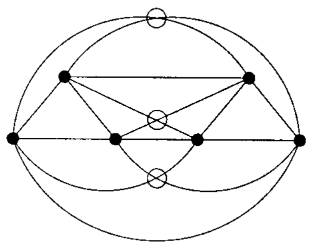
Įrodymas. Tarkime, kad grafą G įdėjome į plokštumą ir gavome $cr(G)$ briaunų susikirtimų. Susiskirtimo taškus prijungę prie viršūnių aibės, o jais apribotas briaunų dalis – prie briaunų, gauname naują grafą, kuris bus plokščias.



Naujojo grafo eilė lygi $n' = n + cr(G)$, briaunų skaičius – $m' = m + 2cr(G)$, nes kiekviena naujoji viršūnė yra ketvirto laipsnio. Pagal (11.2) gauname

$$m + 2cr(G) \leq 3(n + cr(G)) - 6.$$

Iš čia išplaukia teoremos tvirtinimas. ◇



Pastebėkite, kad $cr(K_6) = 3$. Jei m priklauso nuo n tiesiškai, tai 3 teoremos rezultatas yra gana tikslus. Bendru atveju jis grubokas. 1973 metais P. Erdős ir R.K. Guy iškėlė hipotezę, kad

$$cr(G) \geq c\frac{m^3}{n^2}, \quad c > 0,$$

kurią 1982 metais įrodė visas būrys matematikų. Mes pateiksime tikimybinį kiek tikslesnio rezultato įrodymą.

4 teorema. *Jei paprastajam n eilės ir m didumo grafui $m \geq 4n$, tai*

$$cr(G) \geq \frac{1}{64}\frac{m^3}{n^2}.$$

Įrodymas. Nagrinėkime minimalų grafo G įdėjimą į plokštumą. Tarkime, kad jame viršūnės atsiranda nepriklausomai su vienodomis tikimybėmis $0 < p < 1$. Gauname atsitiktinį grafą G_p. Jo eilė n_p, didumas m_p ir susikirtimų skaičius $X_p = cr(G_p)$ yra priklausomi atsitiktiniai dydžiai. Tačiau 3 teoremos teiginys jam galioja. Gauname

$$X_p - m_p + 3n_p \geq 6 > 0.$$

Iš čia išplaukia sąryšis vidurkiams

$$\mathbf{E}X_p - \mathbf{E}m_p + 3\mathbf{E}n_p > 0. \tag{11.3}$$

Suskaičiuojame juos

$$\mathbf{E}n_{=}pn, \qquad \mathbf{E}m_p = mp^2, \qquad \mathbf{E}X_p = p^4 cr(G).$$

Sunkiau pastebima paskutinė lygybė argumentuojama tuo, kad naujajame grafe susikirtimas atsiranda senojo vietoje, jei pasirodo visos keturios briaunų galinės viršūnės. Dabar įstatę į (11.3), gauname

$$p^4 cr(G) - p^2 m + 3pn > 0.$$

Vadinasi,

$$cr(G) > \frac{p^2 m - 3pn}{p^4} = \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3}.$$

Parinkę $p = 4n/m$, iš čia gauname reikiamą įvertį. $\diamond$

Iš tiesų, gražus įrodymas!

NAUDOTA LITERATŪRA

1. P.J. Cameron, *Combinatorics: Topics, Techniques, Algorithms*, Cambridge University Press, 1994.

2. M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer, Berlin, 2nd edition, 2001.

3. H.S.Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press, San Diego, 2nd edition, 1994.

4. J.S. Vitter, Ph. Flajolet, Average-case analysis of algorithms and data structures, In: *Handbook of Theoretical Computer Science* (J. van Leeuwen, Ed), Elsevier, Amsterdam, 1990, 433–524.